Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě

MATEMATICKÉ METODY V EKONOMII

RNDr. Karel Hasík, Ph.D.

Obsah

1 ÚVOD DO LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
První část této kapitoly slouží k vytvoření základní představy o povaze úloh, které je možné pomocí lineárního programování řešit. Nezbytnou součástí je v této fázi zejména matematická formulace praktické úlohy, které by měla být věnována zvýšená pozornost.

Po seznámení se základními typy úloh lineárního programování zaměříme pozornost na hledání jejich společné struktury, jejíž nalezení nám umožní sestavit obecný tvar úlohy lineárního programování a zkoumat tak vlastně všechny typy úloh najednou.

Po zavedení potřebných pojmů jako jsou přípustné či optimální řešení úlohy lineárního programování, se seznámíme s nejpoužívanější metodou sloužící k řešení úloh lineárního programování - a sice se simplexovou metodou. Tuto metodu podrobně popíšeme, ale zatím jen z praktického hlediska potřebného pro výpočet. Příslušná teorie bude vybudována v druhé kapitole.

Průvodce studiem
V životě se často dostáváme do situací, ve kterých je potřeba učinit rozhodnutí. Je zcela přirozené, že se chceme rozhodnout co nejlépe vzhledem k daným okolnostem. Pokud počet rozhodnutí není velký, můžeme zvážit všechny možnosti a zvolit tu, která nám nejvíce vyhovuje. V dnešní době ale narůstá počet případů, kdy není možné posoudit všechny možné varianty. Taková sitace nastává např. při řízení podniku, kdy plánování optimální strategie mnohdy vyžaduje vyhodnotit obrovské množství informací. Tento jev není v ekonomice nový a v posledních desetiletích je navíc umocněn rozvojem výpočetní techniky, která umožňuje shromáždit obrovské množství dat. Po jejich vyhodnocení jsme pak postaveni před rozhodnutí.

Jednou z matematických disciplín, jejichž podstatou je hledání optimálního rozhodnutí v případech, kdy v úvahu přichází velké množství množností, je lineární programování. Jedná se o odvětví matematiky, které je silně prakticky orientované a má velmi široké množství aplikací. K nalezení optimálního rozhodnutí se používají za tímto účelem odvozené algoritmy.

Pomocí lineárního programování je možné řešit velké množství problémů, které mohou mít natolik rozmanitou povahu, že není možné podat jejich úplný přehled. V této kapitole uvedeme pouze některé typické problémy, s nimiž se můžeme v praxi často setkat. Těmito problémy se budeme zabývat ve zjednodušeném tvaru s cílem ilustrovat postup při formulaci matematického modelu úloh lineárního programování a nastínit jejich základní strukturu, protože popis problémů reálných co do rozsahu a složitosti by si vyžádal mnoho času a místa. Kromě toho je u praktických problémů nejobtížnějším krokem právě formulace úlohy a bylo by proto z didaktického hlediska nevhodné začínat tím nejtěžším.

Společné rysy úloh lineárního programování je možné popsat takto:

1. Je dána možnost provést větší počet činností v různých kombinacích, přičemž toto provedení je omezeno na základě daných podmínek a požadavků.

2. Je známý cíl rozhodování. Jinými slovy, máme k dispozici hodnotící kritérium, podle kterého posuzujeme přínos jednotlivých kombinací prováděných činností a hledáme tu nejvýhodnější.

V úloze lineárního programování jsou podmínky či požadavky popsané pomocí soustavy rovnic a nerovnic a cíl rozhodování je vyjádřen požadavkem nalézt maximální nebo minimální hodnoty (tj. nejvýhodnější kombinaci) funkce více proměnných na dané množině.

Teorie lineárního programování je dnes již prakticky uzavřena a jedná se o disciplínu s dobře propracovanými metodami, které vyžadují poměrně jednoduché matematické prostředky. Na poli praktických aplikací mají metody lineárního programování široké uplatnění.

1.1 Základní typy úloh lineárního programování

1.1.1 Úloha o plánování výroby

Zadání úlohy

Společnost má v plánu zavést výrobu dvou nových výrobků. Má k dispozici 3 dílny, z nichž první dvě provádějí specializované práce a třetí kompletaci výrobků. Po prozkoumání výrobních a prodejních možností byly získány tyto informace:

1. Jaká část výrobní kapacity dílny bude k dispozici pro výrobu těchto výrobků (procentní zatížení).

2. Výrobní kapacita potřebná na jednotku produkce za minutu.

3. Zisk z prodeje každého z výrobků.

Údaje jsou uvedeny v tabulce

dílna	výrobek 1	výrobek 2	kapacita k dispozici (%)
dílna 1	1	0	4
dílna 2	0	2	12
dílna 3	3	2	18
zisk	300 Kč	500 Kč	

Úkolem je stanovit plán výroby tak, aby při prodeji výrobků dosáhl podnik co největšího zisku.

Formulace úlohy

Klíčovými zdroji pro výrobu jsou v tomto případě dílny, přesněji řečeno jejich kapacita. Je samozřejmé, že podnik potřebuje k výrobě těchto výrobků také jiné zdroje, jako např. stroje, suroviny, lidské zdroje, energii apod. Zde se však mlčky předpokládá, že jsou k dispozici v dostatečném množství a nejsou tedy pro výrobu nijak limitující. Dále pro nás není, z hlediska řešení této úlohy, důležitá technologie výrobního procesu. Nás zajímá jen to, že k výrobě toho či onoho výrobku je nutné vyčlenit danou kapacitu v jednotlivých dílnách a že výrobní kapacita je limitujícím faktorem při výrobě. Dalším směrodatným údajem je zisk, který jednotlivé výrobní plány přináší.

Přistoupíme-li k vlastní formulaci, označme nejdříve pomocí proměnných x_1 a x_2 počet kusů výrobku 1 a výrobku 2 vyrobených za minutu. V závislosti na skladbě výroby bude podnik dosahovat určitého zisku a tuto závislost můžeme vyjádřit vztahem

$$z = 300x_1 + 500x_2\,.$$

Jelikož zisk má být co největší, budeme hledat maximum této funkce na množině všech možných výrobních plánů. Tato množina je omezená v důsledku omezenosti výrobních kapacit, které je také nutné matematicky vyjádřit. Z tabulky vidíme, že výroba jednoho kusu prvního výrobku si vyžádá 1% z celkové kapacity první dílny a že máme v této dílně vyčleněny celkem 4%. Matematicky můžeme toto omezení vyjádřit pomocí nerovnosti

$$x_1 \leq 4\,.$$

Podobně ze vztahu mezi výrobkem 2 a dílnou 2 vyplývá omezení ve tvaru

$$2x_2 \leq 12\,.$$

V dílně 3 probíhá montáž výrobků 1 a 2, která si vyžádá 3 resp. 2% z její kapacity ve vztahu k jednotkám produkce za minutu. Celkem je pro montáž výrobků 1 a 2 vyčleněno 18% výrobní kapacity ve třetí dílně. Matematicky můžeme výrobní proces ve třetí dílně vyjádřit ve tvaru

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18\,.$$

Zdálo by se, vzhledem k tomu, že žádná další omezení ve výrobním procesu nejsou, že můžeme formulaci úlohy ukončit. Z matematického hlediska je ale nutné vyjádřit ještě jednu dosud samozřejmě předpokládanou skutečnost. Proměnné x_1

a x_2 nesmí nabývat záporných hodnot. Tato omezení, z praktického hlediska naprosto samozřejmá, jsou z matematického hlediska stejně důležitá jako omezení daná kapacitou dílen a jejich vynechání by mohlo vést k ekonomicky nepřípustným řešením, např. $x_1 = 50, x_2 = -10$.

Shrneme-li výše uvedené v matematickém jazyce, dostáváme následující úlohu: Nalézt dvojici čísel x_1 a x_2 tak, aby funkce

$$z = 300x_1 + 500x_2$$

nabyla maximální hodnoty, bereme-li v úvahu omezení

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

1.1.2 Úloha o míchání směsi

Zadání úlohy

Farmář se zabývá chovem prasat. Potřebuje zjistit, jaké množství jednotlivých druhů krmiva jim má dávat, aby splnil stanovené nutriční požadavky a přitom utratil za krmivo co nejméně peněz. Obsah sledovaných složek přepočtených na jeden kilogram příslušného krmiva je zaznamenán v následující tabulce, přičemž v posledním řádku je cena jednotlivých druhů krmiva a v posledním sloupci minimální denní množství nutričních složek, které je nutné dodržet.

Nutriční složky	kukuřice	sušená krmná směs	vojtěška	Min. denní požadavky
uhlohydráty	90	20	40	200
proteiny	30	80	60	180
vitamíny	10	20	60	150
cena (Kč)	21	18	15	

Formulace úlohy

Z předchozí úlohy jsme si odnesli následující zkušenost: i když proces, který chceme optimalizovat, ovlivňuje celá řada činitelů, při formulaci úlohy postačí zaměřit se na limitující faktory. Těmi jsou v tomto případě předepsané minimální denní dávky sledovaných složek.

Označme proměnnými x_1, x_2 a x_3 množství jednotlivých druhů krmiva v kilogramech. Závislost složení směsi na její ceně můžeme vyjádřit vztahem

$$z = 21x_1 + 18x_2 + 15x_3\,.$$

Chceme nalézt minimum této funkce v závislosti na podílu druhů krmiv ve směsi. Z tabulky vidíme, že množství uhlohydrátů obsažené v jednotlivých druzích krmiva činí po řadě 90, 20 a 40 jednotek. Dostatečné množství uhlohydrátů ve směsi bude zajištěno, jestliže bude splněna nerovnost

$$90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200\,.$$

Obdobnými úvahami získáme následující dvě nerovnosti, týkající se proteinů a vitamínů

$$\begin{aligned} 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 &\geq 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 &\geq 150\,. \end{aligned}$$

Také nyní nesmíme zapomenout připojit podmínky nezápornosti kladené na proměnné x_1, x_2 a x_3. Celkem tedy dostáváme následující úlohu:
Nalézt hodnoty x_1, x_2, x_3 tak, aby funkce

$$z = 21x_1 + 18x_2 + 15x_3$$

nabyla minimální hodnoty při omezeních

$$\begin{aligned} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 &\geq 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 &\geq 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 &\geq 150 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

1.1.3 Dopravní úloha

Zadání úlohy

Ve dvou výrobních centrech V_1, V_2 se za danou časovou jednotku vyrobí 3000t, resp. 2000t určitého zboží. Toto zboží je potřeba přepravit do tří spotřebních středisek S_1, S_2, S_3, která požadují 1000t, 2000t, resp. 2000t daného zboží za stejnou časovou jednotku. Dále nechť $c_{11} = 100, c_{12} = 110, c_{13} = 130, c_{21} = 215, c_{22} = 180, c_{23} = 140$ je cena za dopravu zboží z výrobního centra V_i do spotřebního střediska S_j, pro $i = 1, 2$ a $j = 1, 2, 3$. Úkolem je stanovit plán dopravy zboží tak, aby náklady na dopravu byly minimální a byly splněny požadavky odběratelů při dané nabídce výrobců.

Formulace úlohy

Zaměříme-li se na klíčové limitující faktory, vidíme, že u dopravní úlohy jsou jimi nabídka výrobních center V_1 a V_2 a poptávka spotřebitelů S_1, S_2, S_3 .Počet proměnných vystupujících v dopravní úloze bude šest, abychom mohli vyjádřit vztah mezi libovolným výrobním centrem a libovolným spotřebním střediskem. Z praktických důvodů je účelné označit tyto proměnné dvěma indexy místo jednoho, tj. symbolem x_{ij} budeme značit neznámé množství zboží dopraveného z výrobního centra V_i do spotřebního střediska S_j v tunách.

Potom funkce, jejíž minimum máme nalézt, má tvar

$$z = 100x_{11} + 110x_{12} + 130x_{13} + 215x_{21} + 180x_{22} + 140x_{23}$$

při omezeních vyplývající z nabídky a poptávky.

Uvažujeme-li údaje vztahující se k nabídce výrobních center V_1 a V_2, dostáváme následující rovnice

$$\begin{array}{cccccccc} x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13} & & & & = & 3000 \\ & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23} & = & 2000, \end{array}$$

které vyjadřují, že první resp. druhé výrobní centrum nabízí 3000t resp. 2000t zboží spotřebním střediskům. Je nutné ale ještě sestavit omezení vyplývající z požadavků spotřebních středisek, které mají tvar rovnic

$$\begin{array}{cccccccccc} x_{11} & & & + & x_{21} & & & & = & 1000 \\ & x_{12} & & & & + & x_{22} & & = & 2000 \\ & & x_{13} & & & & + & x_{13} & = & 2000. \end{array}$$

Protože ani v tomto případě by záporné hodnoty proměnných x_{ij} neměly žádnou ekonomicky přijatelnou interpretaci, připojujeme rovněž požadavky nezápornosti kladené na proměnné x_{ij}.

Úkol 1

Napište závěrečný tvar úlohy tak, jak jsme to učinili v předcházejících dvou případech.

Úkol 2

V praxi se můžeme často setkat také s úlohou o dělení materiálu, podrobnosti k této problematice nastudujte z literatury.

Příklady k procvičení

Sestavte matematický model úloh

1. Společnost na výrobu cukrovinek vyrábí čtyři druhy čokolády: hořkou, mléčnou, oříškovou a bílou. Spotřebovává tři základní suroviny - tuk, kakao a

cukr, jejichž denně dodávané množství je omezeno údaji v tabulce. Spotřeba jednotlivých surovin a cena výrobku za 1 kg je uvedena v následující tabulce:

suroviny/výrobky	hořká	mléčná	oříšková	bílá	množství
tuk	0,4	0,45	0,4	0,35	580 kg
kakao	0,3	0,2	0,2	0,3	240 kg
cukr	0,3	0,35	0,4	0,35	360 kg
cena Kč/kg	312	288	360	216	

Podle výrobních smluv musí firma zajistit výrobu alespoň 100 kg bílé čokolády. Sestavte denní výrobní program firmy tak, aby její tržby byly maximální.

2. Zemědělský podnik pěstuje v rostlinné výrobě 5 druhů zemědělských plodin, a sice pšenici, ječmen, řepku, cukrovku a brambory. Ziskovost jednotlivých plodin je po řadě 1000,- Kč/t, 1200,- Kč/t, 1800,- Kč/t, 1600,- Kč/t a 400,- Kč/t. Jednotlivé plodiny dávají následující výnosy:

pšenice	5t/ha
ječmen	4t/ha
řepka	3t/ha
cukrovka	50t/ha
brambory	30t/ha.

Pro tyto plodiny má podnik k dispozici 2500 ha orné půdy. Cukrovka, brambory a řepka jako plodiny zlepšující půdní úrodnost musí být pěstovány minimálně na 40 % celkové výměry. S ohledem na pevně uzavřený kontrakt s cukrovarem může podnik vyprodukovat maximálně 7500 tun cukrovky. Dále musí podnik dodat minimálně 6000 tun brambor tradičnímu odběrateli v souladu s dlouhodobě uzavřenou smlouvou. Stanovte výrobní program, tj. výměru tržních plodin tak, aby bylo dosaženo maximálního zisku.

3. Maminka chce pro svou rodinu vybrat nejlepší kombinaci 3 druhů nápojů, aby splnila týdenní dávku iontů a zároveň zaplatila co nejméně peněz. Týdenní dávky, údaje o ceně nápojů a obsahy látek jsou uvedeny v tabulce:

ionty mg/l	Toma Natura	Mattoni	Dobrá voda	minimální týdenní dávka
Mg^{2+}	6,41	24,9	11	529
Ca^{2+}	30,7	87,6	8,6	875
Na^{+}	19	71,9	10	3500
cena Kč/l	8	9	3,9	

Formulujte úlohu.

4. Vedoucí střediska živočišné výroby potřebuje optimalizovat denní krmnou dávku pro určitou kategorii hospodářských zvířat. Jednotlivé druhy krmiv, množství živin v nich obsažená, cenu krmiva a minimální normativní potřebu uvádí následující tabulka:

živiny g/kg	siláž	senáž	seno	jadrná směs	min. potřeba
stravitelné dusíkaté látky	180	140	90	280	4220
bílkoviny	150	120	140	190	3500
minerální látky	15	25	45	80	760
cena krmiva Kč/t	450	550	1200	5500	

Sestavte denní krmnou dávku tak, aby splňovala minimální denní potřebu a náklady na ni byly minimální.

5. Firma vyrábí ocelové příhradové konstrukce. Pro konkrétní zakázku je nutné připravit ocelové tyčky délky 30, 25 a 20 cm. Tyčky se řežou z tyčí o délce 80 cm (zbytek po dělení materiálu pro výrobu jiné ocelové konstrukce). Potřeba požadovaných tyček je následující: 50 ks délky 30 cm, 80 ks délky 25 cm a 100 ks délky 20 cm. Tyčí 80 cm dlouhých je dostatečné množství. Navrhněte optimální způsob dělení materiálu (tzn. kolikrát je nutné použít konkrétní způsob dělení), který zajistí minimální odpad. Jednotlivé způsoby dělení tyčí délky 80 cm uvažujte pouze takové, při kterých zbytek po dělení je menší než délka nejkratší tyčky.

6. Uvažujte předchozí zadání s těmito změnami:
Kovové tyčky zadaných délek se používají pro výrobek PX_1, k jehož výrobě je potřeba 5 tyček délky 30 cm, 4 tyčky délky 25 cm a 2 tyčky délky 20 cm. Celkový počet tyčí délky 80 cm je omezen na 500 ks. Požadavky na počty tyček jednotlivých délek z předchozího zadání neplatí. Cílem je provést dělení 500 ks tyčí délky 80 cm tak, abychom mohli vyrobit maximální počet výrobků PX_1 bez ohledu na množství odpadu. Opět uvažujte pouze takové způsoby dělení, u kterých je odpad menší než délka nejkratší tyčky. Obecně je však nutné uvažovat všechna možná dělení, tedy i taková, při nichž je odpad větší než délka nejkratší tyčky.

Řešení

1. Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 4$ představují jednotlivé druhy čokolád v kg (po

řadě dle textu zadání)

$$\max z = 312x_1 + 288x_2 + 360x_3 + 216x_4$$

$$\begin{aligned} 0,4x_1 + 0,45x_2 + 0,4x_3 + 0,35x_4 &\leq 580 \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 &\leq 240 \\ 0,3x_1 + 0,35x_2 + 0,4x_3 + 0,35x_4 &\leq 360 \\ x_4 &\geq 100 \\ x_1, x_2x_3, x_4 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

2. Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 5$ představují optimální výměru jednotlivých plodin v ha (po řadě dle textu zadání)

$$\max z = 5000x_1 + 4800x_2 + 5400x_3 + 80000x_4 + 12000x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 2500 \\ x_3 + x_4 + x_5 &\geq 0,4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} -0,4x_1 - 0,4_2 + 0,6x_3 + 0,6x_4 + 0,6x_5 &\geq 0 \\ 50x_4 &\leq 7500 \\ 30x_5 &\geq 6000 \\ x_1, x_2x_3, x_4, x_5 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

3. Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 3$ představují jednotlivé druhy nápojů v litrech (po řadě dle textu zadání)

$$\min z = 8x_1 + 9x_2 + 3,9x_3$$

$$\begin{aligned} 6,41x_1 + 24,9x_2 + 11x_3 &\geq 529 \\ 30,7x_1 + 87,6x_2 + 8,6x_3 &\geq 875 \\ x_1 + 71,9x_2 + 10x_3 &\geq 3500 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

4. Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 4$ představují optimální dávku jednotlivých krmiv v kg na kus a den

$$\min\ z = 0,45x_1 + 0,55x_2 + 1,2x_3 + 5,5x_4$$

$$\begin{aligned} 180x_1 + 140x_2 + 90x_3 + 280x_4 &\geq 4220 \\ 150x_1 + 120x_2 + 140x_3 + 190x_4 &\geq 3500 \\ 15x_1 + 25x_2 + 45x_3 + 80x_4 &\geq 760 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

5.

délka tyčky v cm	způsoby dělení							
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
30cm	2	1	1	1	0	0	0	0
25cm	0	2	1	0	3	2	1	0
20cm	1	0	1	2	0	1	2	4
odpad cm	0	0	5	10	5	10	15	0

Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 8$ představují optimální počet použití jednotlivých způsobů dělení

$$\min\ z = 5x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 15x_7$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 50 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 &= 80 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_7 + 4x_8 &= 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 &\geq 0 \end{aligned}$$

musí být také dodržena podmínka celočíselnosti $\Rightarrow$ x_j celočíselné.

6. Proměnné $x_j,\ j = 1, \ldots, 8$ představují optimální počet použití jednotlivých způsobů dělení

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7} = \frac{5}{4}$$

po úpravě

$$8x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 15x_5 - 10x_6 - 5x_7 = 0$$

$$\frac{2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7}{x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 + 2x_7 + 4x_8} = \frac{4}{2}$$

po úpravě

$$-4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 + 6x_5 - 6x_7 - 16x_8 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{8} x_j &\leq 0 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

musí být také dodržena podmínka celočíselnosti $\Rightarrow$ x_j celočíselné.

1.2 Obecný tvar úlohy lineárního programování

V předchozím odstavci jsme se zabývali zcela konkrétními problémy a jejich matematickou formulací. Naším dalším úkolem nyní bude povšimnout si společných rysů těchto úloh. Při bližším zkoumání zjistíme, že ve všech případech jsme měli k dispozici informace pro posouzení výhodnosti daných možností a informace o limitujících faktorech. Při formulaci matematického modelu se ukázalo jako účelné připojit ještě podmínky nezápornosti, abychom vyloučili řešení, která nemají ekonomickou interpretaci. Chceme-li tyto skutečnosti vyjádřit pro všechny typy úloh, je vhodné dát veličinám a proměnným vystupujícím v úloze lineárního programování obecnou interpretaci.

Je dáno m veličin, které vyjadřují kapacitu dílen, dispoziční množství surovin, limity, které není možné překročit apod. Souhrnně je budeme nazývat zdroje a značit je $b_1, \ldots, b_m$. Tyto zdroje chceme využít k realizaci n procesů, jako jsou výroba výrobku, míchání směsi, přeprava zboží apod., přičemž máme k dispozici dané optimalizační kritérium. Pomocí proměnných $x_1, \ldots, x_n$ vyjadřujeme na jaké úrovni, či s jakou intenzitou uvažované procesy probíhají. Symbolem $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ budeme značit množství i-tého zdroje, které je potřeba k zabezpečení jednotkového provedení j-tého procesu. Koeficienty $c_1, \ldots, c_n$ udávají růst či pokles optimalizované veličiny z v souvislosti s realizací j-tého procesu, vztažený na jednotku. Nyní můžeme zformulovat úlohu lineárního programování v obecném tvaru.

Definice 1
Úlohou lineárního programování ve standardním tvaru nazýváme úlohu nalézt maximum tzv. účelové funkce $z\,(x_1,\dots,x_n)$

$$max\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

při omezeních

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \le & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \le & b_m \\ x_1,\dots,x_n & \ge & 0\,. \end{array} \tag{1}$$

Dále budeme předpokládat, že $b_i \ge 0$, pro $i = 1, \cdots, m$.

Z praktické povahy úlohy lineárního programování je zřejmé, že je nutné uvažovat pouze případy, kdy jsou splněna všechny omezení, a nejlepší řešení hledat mezi nimi. Zavádíme proto následující pojmy.

Definice 2
Každá n-tice $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, která splňuje omezení úlohy (1), se nazývá přípustné řešení úlohy. Přípustné řešení, které maximalizuje účelovou funkci se nazývá optimální řešení úlohy.

Pro účely řešení upravujeme úlohu lineárního programování (1) na následující tvar

$$max\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

při omezeních

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & & & = & b_1 \\ a_{21}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & & + & x_{n+2} & & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & & & + & x_{n+m} & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

a při splnění podmínek nezápornosti ve tvaru

$$x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m} \ge 0\,.$$

Protože uvažujeme pouze nezáporné hodnoty proměnných $x_1,\dots,x_{n+m}$, odpovídá každému řešení soustavy omezení úlohy (1) právě jedno řešení soustavy omezení úlohy (2). A protože účelová funkce $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ neobsahuje proměnné $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, nemá přidání těchto proměnných vliv na její hodnoty. O proměnných $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$, které tímto způsobem zavádíme do soustavy omezení, hovoříme jako o doplňkových proměnných.

Význam úpravy nerovnic na rovnice spočívá v tom, že soustava rovnic je z hlediska dalších úprav v procesu řešení vhodnější. V dalším uvidíme, že ne všechna přípustná řešení jsou z hlediska řešení stejně významná. Soustava omezení v úloze (2) má m rovnic a $m + n$ neznámých, což nám dává n stupňů volnosti při hledání jejího řešení. Jinými slovy, hodnoty n proměnných mohou být libovolně zvoleny, přičemž zvláštní pozornost zasluhuje případ, kde za tyto proměnné volíme nuly.

Definice 3
Přípustné řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ úlohy (2) se nazývá bázické, jestliže sloupcové vektory matice soustavy omezení odpovídající kladným souřadnicím vektoru $\mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé.
Bázické řešení úlohy (2) se nazývá nedegenerované, jestliže obsahuje právě m kladných složek. Jestliže je počet kladných složek vektoru $\mathbf{x}$ menší než m, nazýváme příslušné řešení degenerované.

Poznámka

Množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je obvykle nekonečná. Naproti tomu je množina přípustných bázických řešení vždy konečná a počet jejích prvků je dán tím, kolika způsoby lze z $m + n$ prvků vybrat m prvků, tj číslem $\begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}$.

Jiné tvary úlohy lineárního programování

Při řešení úlohy lineárního programování se můžeme setkat s jinými tvary úlohy (1)

1. Hledá se minimum účelové funkce $z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$.

2. Některá omezení mohou být ve tvaru rovností, popř. opačných nerovností, tj.
$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$
popř.
$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \,.$$

1.3 Metody řešení úlohy lineárního programování

1.3.1 Grafické řešení

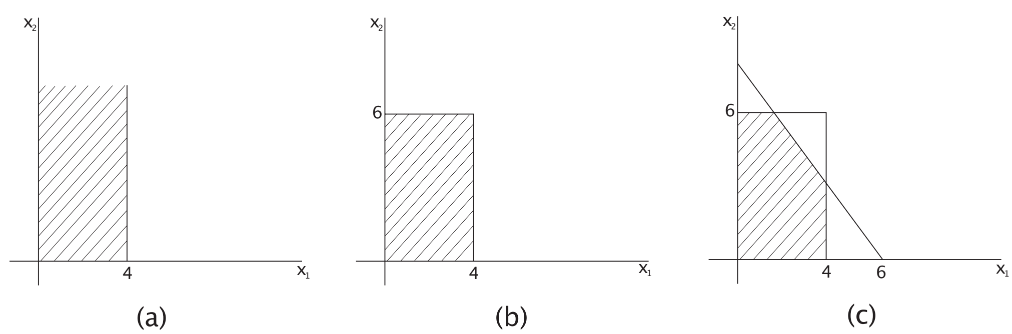
Dříve než uvedeme obecný algoritmus pro řešení úloh lineárního programování, ukážeme si, jak je možné získat řešení v případě, že počet proměnných vystupujících v úloze umožňuje graficky znázornit množinu přípustných řešení a vrstevnice účelové funkce. Takový postup je možný v případě, kdy úloha obsahuje dvě popř. tři proměnné. Uvažujme úlohu o plánování výroby z odstavce 1.1. , ve které máme nalézt dvojici čísel x_1 a x_2 tak, aby funkce

$$z = 300x_1 + 500x_2$$

nabyla maximální hodnoty, bereme-li v úvahu omezení

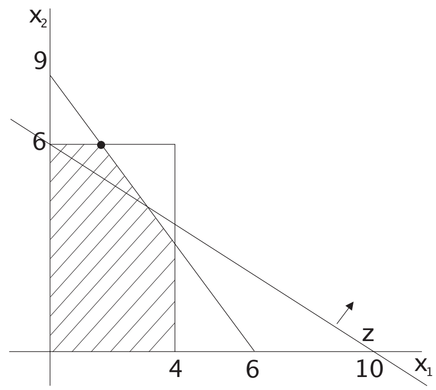
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

V úloze vystupují pouze dvě proměnné, je tedy možné znázornit množinu všech výrobních plánů a vrstevnici fce $z = 300x_1 + 500x_2$ v rovině. Oblast vymezená soustavou omezení (díky nezápornosti proměnných x_1 a x_2 leží v prvním kvadrantu) má následující tvar (viz. obrázek 1c):



Obrázek 1: Postup při hledání množiny všech možných výrobních plánů

Vrstevnice (tj. množiny bodů, v nich daná fce nabývá stejné hodnoty) jsou v případě lineární fce $z = 300x_1 + 500x_2$ přímkami. Znázorníme si nyní jednu z nich např. pro hodnotu zisku $z = 3000$:



Obrázek 2: Grafické řešení

Nyní pozorujme jak se bude měnit hodnota zisku z, jestliže budeme sledovat vrstevnici ležící nad a pod vrstevnicí na obrázku (2). Na vrstevnicích ležících níže zaznamenáme nižší hodnoty zisku, zatímco na vrstevnicích ležících výše vyšší hodnoty zisku. Snadno nahlédneme, že budeme-li "posunovat" přímku na obrázku (2) ve směru šipky, zisk bude narůstat. Protože musíme brát v úvahu omezení, nemůže "posunování" neustále pokračovat a je nutné jej zastavit na hranici oblasti znázorněné na obr. (2). V našem případě se jedná o průsečík přímek $x_2 = 6$ a $3x_1 + 2x_2 = 18$, který má souřadnice $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Tyto hodnoty představují optimální výrobní plán pro výrobu výrobků 1 a 2.

Poznámka

Obdobným způsobem je možné řešit také úlohy obsahující tři proměnně, i když grafické znázornění množiny přípustných řešení už v tomto případě nelze tak jednoduše získat.

1.3.2 Simplexová metoda

Simplexová metoda je obecný algoritmus sloužící k řešení úloh lineárního programování. Skládá se z konečně mnoha kroků, které jdou po určitých významných přípustných řešeních a končí v optimálním řešení úlohy, pokud existuje. Celý postup může být rozdělen do tří etap:

1. Nalezení řešení, ve kterém algoritmus začíná, tzv. výchozí přípustné bázické řešení.

2. Test optimality - zjišťujeme, zda je nalezené řešení optimální.

3. Iterační krok - přechod k dalšímu přípustnému bázickému řešení.

Dále se budeme věnovat simplexovému algoritmu, ale jen po praktické stránce. Dopustíme se tedy prohřešku proti obvyklejšímu postupu užívanému v matematice, kdy se nejdříve odvodí příslušná teorie, která „ospravedlňuje“ následné výpočty. V tomto případě je však možné postupovat obráceně, protože základní myšlenku simplexové metody lez vysvětlit „nezávisle“ na teorii, o kterou se opírá. Z této teorie potřebujeme v této fázi pouze následující poznatek:

Má-li úloha lineárního programování optimální přípustné řešení, má také optimální přípustné bázické řešení.

Z tohoto poznatku vyplývá, že při hledání optimálního řešení se můžeme omezit na přípustná bázická řešení, kterých je konečně mnoho, a ukážeme, jak simplexová metoda touto množinou řešení prochází až nakonec skončí v optimálním řešení.

Ilustrační příklad

Uvažujeme úlohu o plánování výroby z úvodní kapitoly

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Nalezení výchozího přípustného bázického řešení

Už jsme se zmínili o tom, že z praktických důvodů pracujeme při výpočtu s ekvivalentní soustavou omezení ve tvaru rovnic. Zavedeme tedy doplňkovou proměnnou do každé z nerovnic a budeme řešit ekvivalentní úlohu

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & x'_1 & & & & & = & 4 \\ & & 2x_2 & & & + & x'_2 & & & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x'_3 & = & 18, \end{array}$$

Při podmínkách nezápornosti

$$x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3 \geq 0\,.$$

Systém omezení má nyní o dvě proměnné více než je počet rovnic, což nám dává dva stupně volnosti, tj. dvě proměnné mohou být libovolně zvoleny. Při simplexové metodě volíme za tyto proměnné nuly. Lze snadno nahlédnout, že zavedení doplňkových proměnných nám zároveň poskytlo také bázické řešení

$$(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 0, 4, 12, 18) \ .$$

Test optimality

Nyní přejdeme ke druhému kroku, v němž chceme zjistit, zda získané řešení je optimální. To je však ekvivalentní otázce, zda přechodem na jiné bázické řešení lze zlepšit hodnotu účelové funkce. K tomu stačí zkoumat, zda se výměnou některého z vektorů báze za jiný zvýší hodnota účelové funkce. V našem případě jsou v bázi poslední tři vektory. Souřadnice druhého vektoru v této bázi jsou $(0, 2, 2)$ tj. platí

$$\mathbf{a_2} = 0\mathbf{a_3} + 2\mathbf{a_4} + \mathbf{a_5}.$$

Vzhledem k ekonomické interpretaci úlohy to znamená následující: uvažujme na chvíli, že proměnné x'_1, x'_2, x'_3 představují další tři druhy výrobků, jejichž výroba je tak nákladná, že nepřináší žádný zisk. Vyjádření druhého vektoru souřadnicemi $(0, 2, 2)$ má následující ekonomický význam. Pro výrobu jednoho kusu druhého výrobku je nutné v dílnách vyčlenit stejnou výrobní kapacitu jako pro výrobu dvou kusů čtvrtého a pátého výrobku. Jedná se tedy o dva výrobně ekvivalentní procesy z hlediska spotřeby vyčleněné kapacity dílen. Tyto procesy ale nejsou ekvivalentní z hlediska zisku, který přinášejí. Zatímco výroba dvou kusů čtvrtého a pátého výrobku přináší nulový zisk, výroba jednoho kusu druhého výrobku přináší zisk 500 Kč a vidíme tedy, že nabízené řešení $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 0, 4, 12, 18)$ není optimální a je možné ho vylepšit zařazením výroby druhého výrobku místo výrobků 4 a 5. Z matematického hlediska to znamená, že dojde k výměně vektorů v bázi. Při tomto postupu se budou měnit hodnoty proměnných x_j, a tedy také hodnota účelové funkce z. Je tedy možné považovat z za další proměnnou danou rovnicí $z - 300x_1 - 500x_2 = 0$, kterou přidáme k soustavě omezení. Řešíme tedy úlohu tvaru:

$$\max z$$

při omezeních

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
z & - & 300x_1 & - & 500x_2 & & & & & & & = & 0 \\
 & & x_1 & & & + & x'_1 & & & & & = & 4 \\
 & & & & 2x_2 & & & + & x'_2 & & & = & 12 \\
 & & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x'_3 & = & 18
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3 \geq 0\,.$$

Iterační krok

Výměna vektorů v bázi obnáší dosáhnout toho, aby v některém ze sloupců matice omezení příslušném nebázické proměnné vznikl jednotkový vektor na úkor jednotkového vektroru v některém ze sloupců příslušným bázickým proměnným. Toho lze docílit prováděním dovolených úprav systému rovnic, které nemají vliv na jeho řešení (tj. násobení rovnice skalárem a přičtením libovolného násobku některé z rovnic k jiným rovnicím).

Před přechodem na jiné bázické řešení je vhodné si uvědomit, že

- považujeme-li z za další proměnnou, můžeme psát výchozí přípustné bázické řešení ve tvaru $(z|x_1, x_2, {}_1, x'_2, x'_3) = (0|0, 4, 12, 18)$,
- hodnota proměnné z se bude měnit v závislosti na tvaru bázického řešení,
- protože maximalizujeme hodnotu proměnné z, je účelné, aby vždy byla součástí báze,
- protože z je závislá proměnná, jedná se vlastně o obměnu týkající se proměnných $x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3$.

Při práci se systémem rovnic je vhodné pracovat pouze s maticí koeficientů dané soustavy, které zapisujeme do tzv. simplexové tabulky

	z	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	1	-300	-500	0	0	0	0
x'_1	0	1	0	1	0	0	4
x'_2	0	0	2	0	1	0	12
x'_3	0	3	2	0	0	1	18

Abychom mohli provést výměnu proměnných v bázi, je nutné určit proměnnou, která vstoupí do báze, a proměnnou, která bázi opustí. Všimněme si nejdříve toho, že záporný koeficient u některé z proměnných v první rovnici znamená, že nárůst této proměnné zvýší hodnotu účelové funkce. Chceme-li si zajistit co největší nárůst (v přepočtu na jednotku), volíme proměnnou s nejmenším záporným koeficientem. Tou je v našem případě proměnná x_2. Uvažujeme-li nyní, že hodnota proměnné x_2 bude narůstat, musí se zmenšovat hodnoty proměnných x'_2 a x'_3, přičemž nárůst proměnné x_2 zastavíme tehdy, až jedna z proměnných x'_2, x'_3 nabude nulové hodnoty. Vidíme, že při $x_2 = 6$ máme $x'_2 = 0$ a $x'_3 = 6$. Další nárůst proměnné x_2 by způsobil, že proměnná x'_2 nabude záporných hodnot, což by bylo v rozporu s podmínkami nezápornosti. Je tedy nutné zastavit růst proměnné x_2 na hodnotě 6, což způsobí vynulování proměnné x'_2 a její vyřazení z báze. Zjištění, která z proměnných opustí bázi, nemusí být tak zdlouhavé, uvědomíme-li si, že to lze snadno zjistit vypočtením podílů pravých stran omezení a koeficientů ležících ve sloupci příslušnému proměnné vstupující do báze, a vybereme minimální z nich.

V našem případě to znamená vypočíst podíly $\frac{12}{2}$ a $\frac{18}{2}$. Menší hodnota připadá na proměnnou x'_2, která tedy opouští bázi. Sloupec pro vstupující proměnnou a řádek pro vystupující proměnnou mají společný právě jeden prvek. Při přechodu k novému bázického řešení bude tento prvek pro nás klíčový. Úpravy soustavy omezení budeme provádět tak, aby po jejich provedení byla na místě klíčového prvku 1 a ostatní hodnoty v daném sloupci byly nulové.

Shrnutí iteračního kroku

- proměnnou vstupující do báze určíme tak, že v prvním řádku simplexové tabulky vybereme proměnnou s nejmenším (záporným) koeficientem. Je to proměnná, ve které účelová funkce roste nejrychleji.

- proměnnou opouštějící bázi určíme takto:

  - v daném sloupci vybereme všechny koeficienty větší než 0,
  - vypočteme podíly pravých stran koeficientů ležících ve sloupci, který přísluší proměnné vstupující do báze, v úvahu bereme pouze kladné rozdíly,
  - z báze vypustíme proměnnou, na kterou připadne minimální podíl. Je to proměnná, které nabývá jako první hodnoty nula, když vstupující bázická proměnná roste.

- určení nového bázického přípustného řešení a konstrukce nové simplexové tabulky.

Při přechodu k nové simplexové tabulce jsme provedli následující úpravy

1. třetí řádek jsme vydělili dvěma,
2. vynásobili jsme třetí řádek číslem 250 a přičetli k prvnímu,
3. odečetli jsme třetí řádek od čtvrtého,
4. druhý řádek zůstal beze změn.

Provedení těchto úprav dává následující tabulku:

		x_1	x_2	x_1'	x'_2	x_3'	
z	1	-300	0	0	250	0	3000
x_1'	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_3'	0	3	0	0	-1	1	6

Održeli jsme nové bázické přípustné řešení

$$(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 6, 4, 0, 6) \ ,$$

ve kterém účelová funkce nabývá hodnoty 3000.

Dovětek k testu optimality

Z předchozího postupu lze vidět, že existence záporných koeficientů v prvním řádku simplexové tabulky znamená, že hodnotu účelové fce lze zlepšit, tj. v našem případě zvýšit. Můžeme tedy konstatovat

- výpočet končí, jestliže všechny koeficienty v prvním řádku simplexové tabulky jsou nezáporné (neboť v tomto případě již nelze hodnotu účelové fce vylepšit).

V poslední obdržené simplexové tabulce tomu tak není, protože u proměnné x_1 je záporný koeficient -300. Je tedy nutné se opět vrátit k iteračnímu kroku

- určení proměnné vstupující do báze - nejmenší záporný koeficient je -300 u proměnné x_1, takže x_1 je proměnná vstupující do báze,
- bázi opouští proměnná x'_3, protože na ni připadá minimální hodnota podílů $\frac{4}{1}$ a $\frac{6}{3}$,
- určení nové simplexové tabulky obnáší provést tyto úpravy

1. čtvrtý řádek vydělíme 3,
2. čtvrtý řádek vynásobíme 100 a přičteme k prvnímu,
3. čtvrtý řádek vynásobíme $-\frac{1}{3}$ a přičteme k druhému,
4. druhý řádek zůstal beze změny.

		x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	1	0	0	0	150	100	3600
x'_1	0	0	0	1	0	0	2
x_2	0	0	1	0	1/2	0	6
x_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

Nová tabulka obsahuje v prvním řádku pouze nezáporné hodnoty, takže simplexový algoritmus končí. Obdrželi jsme optimální řešení

$$(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (2, 6, 2, 0, 0)\,.$$

Účelová funkce v něm nabývá hodnoty 3600.

Poznámka
Při výpočtech v průběhu simplexové metody mohou nastat situace, kdy uvedená pravidla potřebují podrobnější výklad. Jedná se o následující případy:

1. Při výběru proměnné vstupující do báze může připadat v úvahu více možností v důsledku toho, že nejmenší záporný koeficient stojí u více proměnných. Protože nemáme k dispozici žádné dodatečné kritérium, které by některou z těchto proměnných upřednostnilo, můžeme zvolit libovolnou z nich jako vstupující a pokračovat ve výpočtu.

2. Stejná situace může nastat také při výběru proměnné opouštějící bázi. Také v tomto případě můžeme zvolit libovolnou z nich a pokračovat ve výpočtu. Tento případ je z teoretického hlediska komplikovanější, protože některé z bázických proměnných nabudou nulových hodnot. V této souvislosti hovoříme o degeneraci obdržených řešení, která mají méně nenulových složek než je počet omezení úlohy. Degenerace řešení je nepříjemná, protože iterační krok simplexové metody nemusí vést ke zvýšení hodnoty účelové funkce. Kromě toho existuje teoretická možnost, že výpočet se za této situace zacyklí a simplexová metoda nedospěje k optimálnímu řešení.

   V praktických problémech ale dochází k tomuto jevu velmi zřídka, a proto se nebudeme degenerací úloh blíže zabývat. Případné zájemce odkazujeme na uvedenou literaturu, kde je možné nalézt podrobnější informace.

3. Může nastat také situace, kdy nejsme schopni vybrat proměnnou opouštějící bázi. Tato skutečnost znamená, že účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená a úloha tedy nemá řešení.

4. Úloha lineárního programování může mít více řešení. Pokud tomu tak je, můžeme tento případ rozpoznat podle koeficientů účelové funkce náležících nebázickým proměnným. Pokud jsou po obdržení optimálního řešení některé koeficienty u nebázických proměnných rovny nule, znamená to, že zařazení těchto proměnných do báze vede k alternativním optimálním řešením.

1.3.3 Stínové ceny

Úlohu lineárního programovaní je možné interpretovat jako přiřazení nějakých zdrojů určitým činitelům. Simplexovou metodou nalezneme optimální řešení z hlediska ekonomické prospěšnosti činitelů při dané kapacitě zdrojů. Je přirozené mít v této souvislosti k dispozici také informace o ekonomické prospěšnosti zdrojů. Simplexová metoda poskytuje tyto informace prostřednictvím údajů, které nazýváme stínové ceny.

Stínová cena i-tého zdroje (budeme ji značit y_i^*) vyjadřuje rychlost růstu proměnné z v případě nárůstu kapacity i-tého zdroje. Tyto stínové ceny můžeme nalézt v prvním řádku simplexové tabulky, jakožto koeficienty doplňkových proměnných.

Při řešení úlohy o plánování výroby jsme obdrželi stínové ceny $y_1^* = 0, y_2^* = 150, y_3^* = 100$. Znamená to, že kdyby došlo ke zvýšení výrobní kapacity o jednu jednotku ve druhé nebo třetí dílně, zvýšil by se zisk o 150 popř. o 100Kč. Všimněme si, že stínové ceny jsou nenulové u dílen, jejichž kapacita je plně využita a má tedy smysl uvažovat o jejím zvýšení. U první dílny, která je vytížena jen z poloviny, nemá smysl zvyšovat její výrobní kapacitu a příslušná stínová cena je rovna nule.

Poznámka

Při zahájení výpočtu si možná čtenář položil otázku, proč jsme v nerovnosti $2x_2 \leq 12$ nekrátili a nepracovali s nerovností $x_2 \leq 6$. Tuto úpravu jsme samozřejmě mohli provést, aniž by to ovlivnilo výsledek. Jedno drobné úskalí ale přece jen v sobě krácení skrývá a týká se právě stínových cen. Krácení číslem 2 znamená, že z jednotek kapacity dílen vytvoříme „dvojjednotky“, tj. jednotky dvojnásobné velikosti, což by se při výpočtu projevilo ve stínové ceně u druhé dílny. Vyšla by dvojnásobná, tedy 300 Kč, což je v pořádku, protože to je cena dvojjednotky a ne původní jednotky. Tuto okolnost musíme mít při interpretaci stínových cen stále na paměti, jestliže jsme v některém z omezení krátili.

1.4 Jiné tvary úlohy lineárního programování

1.4.1 Omezení ve tvaru rovností

Zatím jsme podrobně rozebírali simplexovou metodu za předpokladu, že je úloha v našem standardním tvaru s $b_i > 0$, pro $\forall i = 1, 2, \dots m$. V této kapitole ukážeme, jak převést ostatní tvary úloh lineárního programování na námi používaný tvar, který dovedeme řešit. Jedním z problémů u jiných tvarů úlohy lineárního programování je nalézt počáteční bázické řešení, pokud se v omezeních vyskytují $=, \geq$, popř. $b_i \leq 0$. Počáteční řešení se hledá tzv. metodou umělé báze, kterou nyní rozebereme.

Příklad
Řešte úlohu

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & = & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Řešení
Po zavedení doplňkových proměnných dostaneme následující systém rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc} z & - & 300x_1 & - & 500x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_1 & & & + & x_1' & & & = & 4 \\ & & & & 2x_2 & & & + & x_2' & = & 12 \\ & & 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 18. \end{array}$$

Bohužel, tyto rovnice nemají zřejmě počáteční bázické řešení, protože do třetího omezení nelze zavést doplňkovou proměnnou. Metoda umělé báze odstraní tuto potíž zavedením nezáporné umělé proměnné do této rovnice tak, jako by to byla doplňková proměnná. Dostáváme

$$3x_1 + 2x_2 + \bar{x_3} \quad = \quad 18\,.$$

Výchozí přípustné bázické řešení nyní můžeme snadno nalézt,

$$(x_1, x_2, x_1', x_2', \bar{x_3}) = (0, 0, 4, 12, 18)\,.$$

Optimální řešení této revidované úlohy je stejné jako řešení předchozí, pokud umělá proměnná $\bar{x_3} = 0$.

Nyní předpokládejme, že simplexová metoda dovoluje pokračovat a dostaneme optimální řešení revidovaného problému, a že toto řešení je zároveň přípustné řešení původního problému. Zdá se, že bychom mohli prohlásit, že toto řešení je i optimální řešení původního problému.

Bohužel není zaručeno, že optimální řešení revidované úlohy je přípustné řešení původní úlohy. Pokud totiž proměnná $\bar{x_3}$ nabude nenulové hodnoty, nebude splněno třetí omezení v původní úloze. Je proto nutné zavést postih pro přípustná řešení revidované úlohy ležící vně množiny přípustných řešení původní úlohy tak, aby optimální řešení revidované úlohy mohlo ležet pouze v této oblasti. Za tímto účelem pozměníme účelovou funkci $z = 300x_1 + 500x_2$ na funkci ve tvaru

$$z = 300x_1 + 500x_2 - M\bar{x_3}\,,$$

kde M je nějaké velké číslo (mnohem větší než 300 nebo 500), potom z nabývá maxima, když $\bar{x_3} = 0$. Horní řádek simplexové tabulky by tedy měl tvar

$$-300 \quad -500 \quad 0 \quad 0 \quad M \quad 0.$$

Nicméně simplexový algoritmus vyžaduje, aby koeficienty bázických proměnných v prvním řádku simplexové tabulky byly nulové, a $\bar{x_3}$ je nyní bázická proměnná. Z tohoto důvodu musíme čtvrtý řádek tabulky vynásobit $-M$ a přičíst k prvnímu. Po této úpravě běží již simplexový algoritmus standardním způsobem. Jeho jednotlivé mezivýsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách bez dalšího komentáře.

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	$\bar{x_3}$	
z	-3M-300	-2M-500	0	0	0	-18M
x_1'	1	0	1	0	0	4
x_2'	0	2	0	1	0	12
$\bar{x_3}$	3	2	0	0	1	18

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	$\bar{x_3}$	
z	0	-2M-500	3M+300	0	0	-6M+1200
x_1	1	0	1	0	0	4
x_2'	0	2	0	1	0	12
$\bar{x_3}$	0	2	-3	0	1	6

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	$\bar{x_3}$	
z	0	0	-450	0	M+250	2700
x_1	1	0	1	0	0	4
x_2'	0	0	3	1	-1	6
x_2	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	$\bar{x_3}$	
z	0	0	0	150	M+100	3600
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2'	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

Optimální řešení je $(2, 6, 2, 0, 0)$, což je stejný výsledek, jaký jsme obdrželi dříve. Poznamenejme ještě, že vzhleden ke skutečnosti, že umělé proměnné jsou v účelové funkci znevýhodněny nebo též penalizovány, hovoříme v této souvislosti o metodě penalizační sazby.

1.4.2 Omezení ve tvaru opačných nerovností

Dalším případem, který neodpovídá našemu standardnímu tvaru, je případ, kdy je některé omezení ve tvaru opačné nerovnosti. Předpokládejme, že třetí omezení v předcházející úloze má tvar

$$3x_1 + 2x_2 \quad \geq \quad 18.$$

V tomto případě je nutné nejdříve zavést doplňkovou proměnnou, což nám dává rovnost

$$3x_1 + 2x_2 - x_3' \quad = \quad 18.$$

Doplňková proměnná x_3' však nabývá záporné hodnoty, takže takto získané řešení by sice bylo bázické, ale nepřípustné. Musíme proto zavést do rovnice ještě umělou proměnnou $\bar{x_4}$, která nám umožní získat výchozí přípustné bázické řešení, tj. budeme pracovat s omezením ve tvaru

$$3x_1 + 2x_2 - x_3' + \bar{x_4} \quad = \quad 18.$$

Z předchozího odstavce víme, že zavedení umělé proměnné vyžaduje úpravu účelové funkce, což nás vede k použití metody penalizační sazby.

1.4.3 Minimalizační úloha

Zbývá ještě ukázat, jak převést na náš tvar úlohu formulovanou pro minimum

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

při daných omezeních. Tato úloha je ale ekvivalentní úloze nalézt

$$\max(-z) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)\, x_j\, .$$

To znamená, že po nalezení optimální hodnoty $-z$ stačí u výsledku převrátit znaménko a obdržíme optimální hodnotu účelové funkce minimalizační úlohy.

1.4.4 Obměny v podmínkách nezápornosti

Mohou nastat dva případy. Buď je některá z proměnných vymezená nějakou zápornou hodnotou, anebo na ni není kladeno žádné omezení. Oběma případy se budeme nyní blíže zabývat. Uvažujme nejprve úlohu, ve které se vyskytuje omezení tvaru

$$x_j \geq D_j,$$

kde D_j je nějaká záporná konstanta. Takové omezení může být převedeno na standardní podmínku nezápornosti, položíme-li

$$x'_j = x_j - D_j$$

a v původní úloze substituujeme proměnnou x'_j za x_j.

Příklad
Převeďte následující úlohu na standardní tvar

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1 & \geq & -5 \\ & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

V takovém případě klademe $x'_1 = x_1 + 5$ a dostáváme

$$\max z = 300x'_1 + 500x_2 - 1500$$

$$\begin{array}{ccccc} x'_1 & & & \leq & 9 \\ & & 2x_2 & \leq & 27 \\ 3x'_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x'_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Zbývá zabývat se případem, kdy na některou z proměnných není kladeno žádné omezení. Takovou proměnnou lze psát ve tvaru $x_j = x'_j - x''_j$ kde

$$\begin{aligned} x'_j &= x_j \quad \text{pro} \quad x_1 \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{jinak,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''_j &= -x_j \quad \text{pro} \quad x_1 \leq 0 \\ &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Proměnné x'_j a x''_j tedy představují kladnou a zápornou část původní proměnné x_j.

Příklad
Převeďte následující úlohu na standardní tvar

$$\max z = 300x_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Klademe $x_1 = x'_1 - x''_1$, kde $x'_1 \geq 0,\ x''_1 \geq 0$, a dostáváme.

$$\max z = 300x'_1 - 300x''_1 + 500x_2$$

$$\begin{array}{cccc} x'_1 - x''_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x'_1 - 3x''_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x'_1, x''_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Příklady

Řešte úlohy lineárního programování

1.

$$\max z = 20x_1 + 14x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 40 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leq 60 \\ \frac{1}{4}x_2 &\leq 25 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

2.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 2 \\ {}_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

3. Úlohu řešte početně i graficky

$$max\, z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

4. Řešte početně i graficky

$$max\, z = {}_1 + x_2 + 2x_3$$

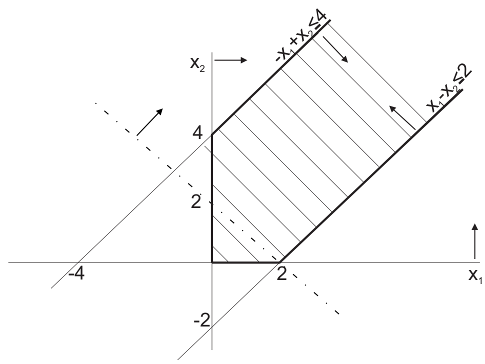
$$\begin{aligned} 2x_1 - \frac{1}{4}x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + \frac{1}{8}x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Řešení

1. $x = (40, 80, 0, 0, 5)$ $z_{opt.} = 1920$

2. $x = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{7}{3}\right)$ $z_{opt.} = \frac{11}{3}$

3. Úloha nemá optimální řešení. Hodnota účelové fce roste neomezeně.



Obrázek 3: Grafické řešení

4. Úloha má dvě základní optimální řešení $x^{(1)} = (2, 0, 1, 0, 3, 0)$ a $x^{(2)} = (0, 12, 1, 0, 7, 0)$. Navíc každá konvexně lineární kombinace tvaru $k_1x^{(1)} + k_2x^{(2)}$, kde $k_1 + k_2 = 1$ a $k_1, k_2 \geq 0$, je také optimální řešení úloh. Například optimální řešení $x^{(3)} = (1, 8, 1, 0, 5, 0)$ odpovídá hodnotám $k_1 = 0,5$ a $k_2 = 0,5$. Hodnota účelové funkce pro jakékoliv optimální řešení činí 18.

2 TEORIE LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

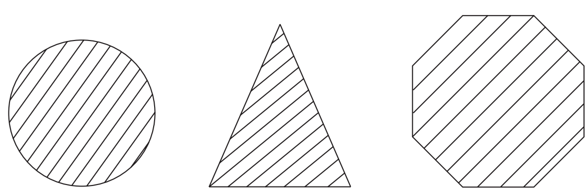
... co by Vám měla přinést tato kapitola:

I když je možné základní myšlenku a postup, kterým pomocí simplexové metody nalezneme optimální řešení úlohy lineárního programování, ilustrovat velmi jednoduše, je zapotřebí uvedené skutečnosti zasadit do odpovídající matematické teorie. Nyní se proto zaměříme na zavedení základních pojmů týkajících se konvexních množin, které nám umožní odvodit potřebná tvrzení dokazující oprávněnost úvah a postupů uvedených v předchozí kapitole. Výsledkem bude odvození vlastností množiny přípustných řešení úlohy lineárního programování a stanovení, za jakých podmínek má tato úloha optimální řešení.

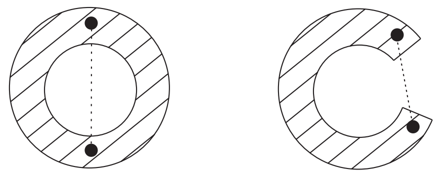
V části s názvem dualita uvidíme, že lineární programování nám neposkytuje pouze jednostranný pohled na daný problém. Naopak, jak jsme již uvedli v první kapitole, výstupem simplexové metody jsou nejen informace a prospěšnosti činitelů, ale také informace o užitečnosti zdrojů. Ve skutečnosti je možné nejen získat informace o zdrojích, ale také pohlédnout na utvořený problém prostřednictvím informací o zdrojích z druhé strany. Takový pohled je jistě užitečný obecně, protože nám brání činit jednostranná rozhodnutí a přispívá k lepšímu pochopení podstaty problému.

2.1 Konvexní množiny

Definice 1
Množinu bodů v n-rozměrném prostoru nazýváme konvexní, jestliže spolu s libovolnými dvěma svými body obsahuje také úsečku, která tyto body spojuje.



Obrázek 4: Příklady konvexních množin



Obrázek 5: Příklady nekonvexních množin

Poznámka

V případě, že $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ jsou body n-rozměrného prostoru, pak

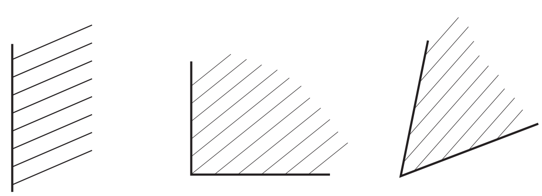
- úsečkou spojující body $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ rozumíme množinu všech bodů, které lze vyjádřit ve tvaru
$$(1-k)\,\mathbf{A_1} + k\mathbf{A_2}\,,$$
kde $k \in \langle 0, 1\rangle$ nebo
$$k_1\mathbf{A_1} + k_2\mathbf{A_2}\,,$$
kde $k_1, k_2 \in \langle 0, 1\rangle$a $k_1 + k_2 = 1$,

- přímkou určenou body $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ nazýváme množinu všech bodů tvaru
$$(1-k)\,A_1 + kA_{2},$$
kde $-\infty < k > \infty$. Nabývá-li přitom k jenom nezáporných hodnot, jedná se o polopřímku vycházející z bodu $\mathbf{A_1}$ jdoucí bodem $\mathbf{A_2}$. Nabývá-li k hodnot z $(-\infty, 1\rangle$, jedná se o polopřímku vycházející z bodu $\mathbf{A_2}$, jdoucí bodem $\mathbf{A_1}$.

Definice 2

Konvexní množina se nazývá:

- omezená - neobsahuje-li žádnou polopřímku,
- neomezená - obsahuje-li alespoň jednu polopřímku.



Obrázek 6: Neomezené konvexní množiny

Poznámka

Omezenou množinu lze definovat i tak, že pro každý její bod $\mathbf{X} = [x_1, \ldots, x_n]$ platí $|x_j| \leq M, (j = 1, \ldots, n)$, kde M je konečné reálné číslo.

Věta 1
Průnik dvou konvexních množin je opět konvexní množina.

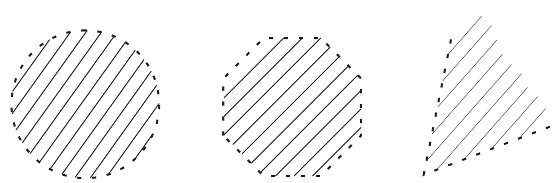
Důkaz

Spojnice libovolných dvou bodů ležících v průniku dvou konvexních množin je podle definice konvexní množiny obsažena v obou těchto množinách, a tedy i v jejich průniku.

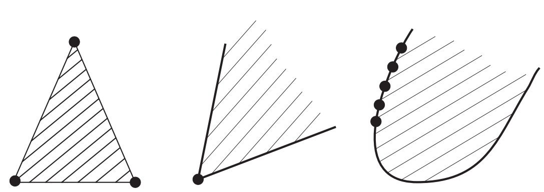
Definice 3
Bod konvexní množiny, který neleží na úsečce spojující dva jiné body této množiny, se nazývá krajním bodem množiny.

Poznámka

Konvexní množina nemusí mít vůbec krajní body, např. vnitřek kruhu (tedy bez bodů kružnice), může mít konečný počet krajních bodů, např. kvadrant, konvexní mnohoúhelník, nebo nekonečný počet krajních bodů, např. množiny bodů kruhu včetně bodů kružnice apod.



Obrázek 7: Konvexní množiny bez krajních bodů



Obrázek 8: Konvexní množiny s krajními body

Definice 4
Nechť je dána konečná množina bodů $\{\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}\} \subseteq E_n$. Množinu všech konvexních kombinací bodů $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$, tj. bodů $\mathbf{A}$ tvaru $\mathbf{A} = k_1\mathbf{A_1} + \ldots + k_n\mathbf{A_n}$, kde $k_j \in \langle 0, 1\rangle$, kde $j = 1, \ldots, n$ a $k_1 + \ldots + k_n = 1$, nazýváme konvexní polyedr. Bod $\mathbf{A_j}$, který není konvexní kombinací ostatních bodů dané množiny, se nazývá vrcholem konvexního polyedru.

Poznámka

Konvexní polyedr se nazývá také konvexním obalem bodů $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$. Je to nejmenší konvexní množina obsahující body $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$. Konvexním obalem dvou bodů je úsečka, tří trojúhelník, čtyř v rovině čtyřúhelník, v prostoru čtyřstěn, atd., za předpokladu, že žádný z těchto bodů není konvexní kombinací ostatních bodů, tj. pokud například tyto body neleží na jedné přímce.

2.2 Lineární nerovnosti a jejich geometrická interpretace

V úvodní kapitole jsme viděli, že soustava omezení úlohy lineárního programování je soustavou lineárních nerovností. Nyní se budeme zabývat geometrickou interpretací lineárních nerovností. Z analytické geometrie je známo, že

- lineární rovnici o dvou neznámých $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ je možné znázornit přímkou, která rozděluje rovinu na dvě poloroviny. V jedné z nich platí $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, ve druhé platí $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$.

Čili nerovnost o dvou neznámých lze znázornit polorovinou, která znázorňuje množinu všech řešení nerovnosti o dvou neznámých. Poznamenejme ještě, že polorovina je konvexní množina a řešením soustavy nerovností o dvou neznámých je každý bod společný všem polorovinám. Zobecníme-li tyto úvahy na prostory vyšší dimenze dostáváme, že:

- lineární rovnici o třech neznámých $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$ odpovídá rovina, která rozděluje trojrozměrný prostor na dva poloprostory. V jednom platí $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ a ve druhém $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq b$.
- ve vícerozměrné geometrii se útvar znázorňující lineární rovnici o n neznámých $a_1x_1+.....+a_nx_n = b$ nazývá nadrovinou. Tato nadrovina rozděluje n-rozměrný prostor na dva poloprostory. V jednom platí $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$ a ve druhém $a_1x_1 + ... + a_nx_n \geq b$.

Obecně tedy množině řešení soustavy nerovností o n neznámých odpovídá společná část poloprostorů znázorňujících nerovnosti soustavy. Jedná se o konvexní množinu, protože podle věty 1 je průnikem konvexních množin opět konvexní množina. To znamená, že množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní.

2.3 Obecné vlastnosti množiny přípustných řešení

Pro účely této kapitoly budeme úlohu lineárního programování formulovat v následujícím vektorovém tvaru. Nalézt n-rozměrný vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tak, aby funkce

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

nabyla maximální hodnoty, při omezeních

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}\,, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{c}$ je n-rozměrný vektor cen, $\mathbf{A}$ je matice koeficientů typu $(m \times n)$ a $\mathbf{b}$ je m-rozměrný vektor pravých stran. Předpokládáme, že $m \leq n$, tj jedná se o soustavu lineárně nezávislých rovnic a hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna počtu řádků.

Věta 1 Množina M všech přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní s konečným počtem krajních bodů.

Důkaz

Skutečnost, že množina přípustných řešení úlohy lineárního programování je konvexní, vyplynula už z geometrické interpretace nerovností a věty 1 v odstavci 2.1. Zde uvedeme důkaz využívající algebraických prostředků. Stačí ukázat, že každá konvexní kombinace dvou přípustných řešení je opět přípustným řešením. Nechť tedy $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$ jsou přípustná řešení. Platí tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax_1} &= \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x_1} \geq 0 \\ \mathbf{Ax_2} &= \mathbf{b}, \qquad \mathbf{x_2} \geq 0\,. \end{aligned}$$

Konvexní kombinaci vektorů $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ lze psát ve tvaru $\mathbf{x} = k\mathbf{x_1} + (1-k)\mathbf{x_2}$, kde $0 \leq k \leq 1$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(k\mathbf{x_1} + (1-k)\mathbf{x}_2) = k\mathbf{Ax}_1 + (1-k)\mathbf{Ax}_2 = k\mathbf{b} + (1-k)\mathbf{b} = \mathbf{b}\,.$$

Nerovnost $\mathbf{x} \geq 0$ je zřejmá.
Je tedy $\mathbf{x}$ přípustným řešením a množina M přípustných řešení je konvexní.

Nyní ukážeme, že krajní body množiny M jsou přípustná bázická řešení a že každé přípustné bázické řešení je krajním bodem množiny M.
$\Leftarrow$
Předpokládejme, že úloha má bázická řešení a pro jednoduchost ho uvažujme ve tvaru

$$\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0),$$

kde $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Podle definice bázického řešení pak musí prvních m vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a_m}$ soustavy omezení tvořit bázi a platí:

$$x_1\mathbf{a_1} + \ldots + x_m\mathbf{a_m} = b\,.$$

Připusťme nyní, že $\mathbf{x}$ není krajním bodem množiny M. Potom je $\mathbf{x}$ konvexní kombinací dvou jiných přípustných řešení $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ a tzn., že platí:

$$\mathbf{x} = k\mathbf{y} + (1-k)\mathbf{z}$$

kde $0 < k < 1$.
Protože souřadnice vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ jsou nezáporné a k, $1-k$ jsou kladná čísla, musí se posledních $n-m$ souřadnic těchto vektorů rovnat nule stejně jako u vektoru $\mathbf{x}$. Máme tedy:

$$\mathbf{y}^T(y_1, ..., y_m, 0, ..., 0) \qquad \mathbf{z}^T = (z_1, ..., z_m.0, ..., 0).$$

Dále, protože $\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$ jsou řešení úlohy, platí:

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{a_1} + \ldots + y_m\mathbf{a_m} &= b \\ z_1\mathbf{a_1} + \ldots + z_m\mathbf{a_m} &= b\,. \end{aligned}$$

To znamená, že vektor $\mathbf{b}$ se dá vyjádřit různými způsoby jako lineární kombinace vektorů báze, což je spor, neboť vyjádření každého vektoru jako lineární kombinace vektorů báze je jednoznačné. Odtud plyne, že $\mathbf{x}$ nemůže být konvexní kombinací jiných bodů množiny M, a je tedy krajním bodem této množiny.
$\Rightarrow$
Nyní nechť $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$ je krajní bod množiny a předpokládejme, že má prvních k souřadnic kladných a ostatní nulové. Dokážeme, že vektory $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k}$ přiřazené ke kladným souřadnicím jsou lineárně nezávislé, tj. $k \leq m$.

Připustíme-li závislost, pak víme, že existuje taková soustava čísel $d_1, \ldots, d_k$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, že platí

$$d_1\mathbf{a_1} + \ldots + d_k\mathbf{a_k} = 0\,.$$

Současně platí, že $\mathbf{x}$ je řešení, a tedy

$$x_1\mathbf{a_1} + \ldots + x_k\mathbf{a_k} = b\,.$$

Násobíme-li první rovnici libovolným číslem $\varepsilon > 0$ a přičteme a odečteme ji od druhé rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}
(x_1 + \varepsilon d_1)\mathbf{a_1} + \ldots + (x_k + \varepsilon d_k)\mathbf{a_k} &= \mathbf{b} \\
(x_1 - \varepsilon d_1)\mathbf{a_1} + \ldots + (x_k - \varepsilon d_k)\mathbf{a_k} &= \mathbf{b}\,.
\end{aligned}$$

To znamená, že vektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^T &= (x_1 + \varepsilon d_1 + \ldots + x_k + \varepsilon d_k, 0, \ldots 0) \\
\mathbf{z}^T &= (x_1 + \varepsilon d_1 - \ldots - x_k + \varepsilon d_k, 0, \ldots, 0)
\end{aligned}$$

jsou také řešeními úlohy lineárního programování. Přitom můžeme zvolit ε dostatečně malé, tak aby prvních k souřadnic vektorů $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ bylo kladných, tj. aby $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ byly přípustnými řešeními. Dále platí, že

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z},$$

a to znamená, že $\mathbf{x}$ je konvexní kombinací řešení $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ a nemůže být krajním bodem množiny M. Dostali jsme spor a z toho vidíme, že každému krajnímu bodu lze přiřadit m lineárně nezávislých vektorů ze soustavy $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_m}$ tak, že souřadnice odpovídající těmto m vektorům jsou nezáporné a ostatní nulové.

Celkem tedy krajním bodům množiny M odpovídají bázická řešení a naopak přípustným bázickým řešením odpovídají krajní body. Bázických řešení je však konečně mnoho a to tolik, kolika způsoby lze z n neznámých vybrat m (nebo $m - n$) neznámých, tj.

$$\binom{n}{m}.$$

Z toho vyplývá, že také krajních bodů je konečně mnoho. Tím je důkaz věty dokončen.

Pro množinu přípustných řešení úlohy lineráního programování může nastat právě jeden z těchto případů:

1. M je prázdná.

2. M je omezená, tedy konvexní polyedr.

3. M je neomezená.

První případ pro nás není zajímavý, neboť úloha nemá řešení.

Ve druhém případě, kdy M je omezená množina, má úloha nutně optimální řešení, a to v některém z krajních bodů množiny M, protože účelová funkce je lineární.
Má-li totiž množina M r-krajních bodů $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že účelová funkce $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nabývá největší hodnoty na této množině bodů v bodě $\mathbf{x_1}$.
Dále nechť $\mathbf{x}$ je libovolný bod z M, pak

$$\mathbf{x} = k_1\mathbf{x_1} + k_2\mathbf{x_2} + \ldots + k_r\mathbf{x_r},$$

kde $k_i \geq 0$, a platí $\sum k_i = 1$. Vypočteme-li hodnotu účelové funkce v bodě $\mathbf{x}$, dostáváme

$$\mathbf{c}^T x = k_1\mathbf{c}^T\mathbf{x_1} + \ldots + k_r\mathbf{c}^T\mathbf{x_r} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x_1}(k_1 + k_2 + \ldots + k_r) = \mathbf{c}^T\mathbf{x_1}.$$

To znamená, že hodnota účelové funkce v libovolném bodě množiny M nemůže být větší než v bodě $\mathbf{x_1}$.

Ve třetím případě obsahuje množina M kromě konvexního obalu krajních bodů $x_1, \ldots, x_r$ alespoň jednu polopřímku. Pak buď účelová funkce $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ dosahuje maxima v některém z krajních bodů, anebo existuje bod $\mathbf{x}^*$ takový, že $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* > \mathbf{c}^T\mathbf{x_i}$ pro $i = 1, ..., r$. Bodem $\mathbf{x}^*$ lze vést polopřímku z některého bodu konvexního obalu bodů $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_r}$. Označíme-li tento bod $\mathbf{x_0}$ můžeme rovnici této polopřímky psát ve tvaru $(1-k)\,\mathbf{x_0} + k\mathbf{x}^* = L$, která celá leží v M.
Hodnoty účelové funkce na této polopřímce jsou

$$\mathbf{c}^T(1-k)\mathbf{x_0} + k\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x_0} + k(\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^T\mathbf{x_0})\,.$$

Protože $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* - \mathbf{c}^T\mathbf{x_0} > 0$, hodnota účelové funkce neomezeně roste s rostoucím k, tj. nedosahuje-li účelová funkce maxima v některém z krajních bodů množiny M, pak její hodnoty na množině M neomezeně rostou.

Výše dokázané výsledky můžeme shrnout do následující věty:

Věta 2
V úloze lineárního programování mohou nastat tyto tři případy:

1. Úloha nemá řešení.
2. Úloha má konečné optimální řešení, a to buď
   (a) jediné,
   (b) nekonečně mnoho - v tomto případě nabývá účelová funkce optimální hodnoty v několika krajních bodech množiny M a ve všech bodech konvexního obalu těchto bodů.
3. Účelová funkce může na množině M nabýt libovolně velkých hodnot.

2.4 Dualita

Jednou z nejdůležitějších částí teorie lineárního programování je teorie duality, jejíž zkoumání je důležité jak z aplikačního hlediska, tak z hlediska teoretického. V následující kapitole uvedeme základní poznatky z teorie duality v lineárním programování. Ukazuje se, že ke každé úloze lineárního programování můžeme určitým způsobem přiřadit jinou úlohu lineárního programování, která s ní velmi úzce souvisí a nazývá se duální úloha k původní úloze. Původní úloha se pak nazývá primární. Vzájemné souvislosti mezi primární a duální úlohou ilustruje následující příklad.

Zadání úlohy
Podnik vyrábí dva druhy výrobků ze tří surovin. Máme za úkol stanovit takový plán výroby, aby bylo dosaženo maximálního zisku. K dispozici máme tyto údaje:

- zisk z prodeje každého výrobku (v Kč),
- celkové množství surovin, které při výrobě používáme (v kg),
- množství i-té suroviny, které spotřebujeme při výrobě j-tého výrobku.

Údaje jsou uvedeny v tabulce:

výrobek	množství potřebné pro výrobu (kg)		množství celkem
surovina	výrobek 1	výrobek 2	
surovina 1	15	35	500
surovina 2	20	16	3000
surovina 3	8	17	3700
zisk (Kč)	150	230	

Formulace úlohy

Označíme-li počet kusů výrobků V_1 a V_2 proměnnými x_1, x_2, můžeme úlohu formulovat takto:

$$\max\, z = 150x_1 + 230x_2$$

při omezeních

$$\begin{aligned} 15x_1 + 35x_2 &\leq 5000 \\ 20x_1 + 16x_2 &\leq 3000 \\ {}_1 + 17x_2 &\leq 3700 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní, že jiný podnik nabízí odkoupení surovin. První podnik bude chtít prodat pouze za cenu, která se alespoň rovná zisku dosaženém při výrobě výrobků V_1, V_2. Máme-li minimalizovat nákupní náklady vycházíme z těchto údajů:

- celkové množství surovin, které má být odkoupeno,
- užitečnost surovin vyjádřená ziskem dosaženým při výrobě V_1, V_2,
- množství i-té suroviny, které potřebujeme k výrobě j-tého výrobku.

Údaje jsou uvedeny v tabulce:

surovina	množství surovin potřebné pro výrobu			zisk (v Kč)
výrobek	surovina 1	surovina 2	surovina 3	
výrobek 1	15	20	8	150
výrobek 2	35	16	17	230
množství celkem (v kg)	5000	3000	3700	

Označíme-li cenu za kilogram surovin S_1, S_2, S_3 proměnnými y_1, y_2, y_3 můžeme úlohu formulovat tímto způsobem:

$$\min w = 5000y_1 + 3000y_2 + 3700y_3$$

při omezeních

$$\begin{aligned} 15y_1 + 20y_2 + 8y_3 &\geq 150 \\ 35y_1 + 16y_2 + 17y_3 &\geq 230 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Obě předchozí úlohy byly sice sestrojeny s různou motivací, ale vycházeli jsme ze stejných údajů. Došlo přitom k výměně rolí pravých stran za koeficienty účelové funkce a naopak. Matice jedné z úloh může být získána transponováním matice druhé úlohy. Nabízí se otázka, zda optimální řešení těchto úloh dají stejnou hodnotu účelové funkce. Budeme se proto nyní zabývat dvojicí takto sestrojených úloh obecně.

Definice 1
Duální úlohou k úloze nalézt

$$\max z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

při omezeních

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ & & & & x_{1,} \ldots x_n & \geq & 0 \end{array}$$

nazýváme úlohu nalézt

$$\min w = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$$

při omezeních

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & \ldots & + & a_{m1}y_m & \geq & c_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{1n}y_1 & + & \ldots & + & a_{mn}y_m & \geq & c_n \\ & & & & y_1, \ldots, y_m & \geq & 0\,. \end{array}$$

Poznámka 1
Maticový zápis obou úloh má tvar

$$\max z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\ge 0
\end{aligned}
$$

a

$$
\min w = \mathbf{b}^T \mathbf{y}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^T \mathbf{y} &\ge c \\
\mathbf{y} &\ge 0\,.
\end{aligned}
$$

Věta 1
Nechť $\mathbf{x_p}$ je libovolné přípustné řešení primární úlohy a $\mathbf{y_p}$ je libovolné přípustné řešení duální úlohy. Potom pro hodnoty účelových funkcí platí

$$
\mathbf{c}^T \mathbf{x_p} \le \mathbf{b}^T \mathbf{y_p}\,.
$$

Důkaz

$$
\mathbf{c}^T \mathbf{x_p} \le \left(\mathbf{A}^T \mathbf{y_p}\right)^T \mathbf{x_p} = \mathbf{y_p}^T \mathbf{A} \mathbf{x_p} \le \mathbf{y_p}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y_p}\,.
$$

Věta 2
Nechť $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou taková řešení primární, popř. duální úlohy, že platí

$$
\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*.
$$

Potom $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou optimální řešení této dvojice úloh.

Důkaz

Nechť platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.
Potom pro všechna přípustná řešení $\mathbf{x_p}$ primární úlohy platí

$$
\mathbf{c}^T \mathbf{x_p} \le \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*
$$

a pro všechna přípustná řešení $\mathbf{y_p}$ duální úlohy platí

$$
\mathbf{b}^T \mathbf{y_p} \ge \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*\,.
$$

Čili $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ jsou nutně optimální řešení dvojice duálních úloh.

Věta 3 (Základní věta o dualitě) Nechť duální úlohy mají přípustná řešení $\mathbf{x_p}, \mathbf{y}_p$. Potom každá z úloh má také optimální řešení $\mathbf{x}^*$, resp. $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$. Pokud jedna z dvojice duálních úloh nemá přípustné řešení, pak žádná z nich nemá optimální řešení.

Důsledek
Přípustná řešení $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ dvojice duálních úloh jsou optimální právě tehdy, když $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$.
Důkaz

Nutná podmínka plyne ze základní věty o dualitě. Postačující podmínka vyplývá z věty 2.

Věta 4
Nechť $\mathbf{x}^*$je optimální řešení primární úlohy a $\mathbf{y}^*$ je optimální řešení duální úlohy. Pokud je po dosazení vektoru $\mathbf{x}^*$ do soustavy omezení primární úlohy i-tá nerovnost splněna ostře, pak je i-tá složka vektoru $\mathbf{y}^*$ rovna 0. Podobně, pokud je po dosazení vektoru $\mathbf{y}^*$ do soustavy omezení duální úlohy j-tá nerovnost splněna ostře, pak je j-tá složka vektoru $\mathbf{x}^*$ rovna 0.

Důkaz

Pro optimální řešení dvojice duálních úloh platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b}$. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x}^* &= 0 \\ \left(\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^{*T}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}^* &= 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{*T}\mathbf{b} - \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* &= 0 \\ \mathbf{y}^{*T}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\right) &= 0, \end{aligned}$$

přičemž zároveň platí

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{y}^{*T} \geq \mathbf{0}\,.$$

Je-li nyní $b_i - (a_{i1}x_i^* + a_{i2}x_2^* + \ldots + a_{in}x_n^*) > 0$, musí platit $y_i^* = 0$,
dále je-li $c_j - (y_1^* a_{1j} + y_2^* a_{2j} + \ldots + y_m^* a_{mj}) < 0$, musí platit $x_j^* = 0$.

Příklady k procvičení

K dané úloze lineárního programování sestrojte úlohu duální

1.

$$\max z = 20x_1 + 14x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\leq 40 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leq 60 \\ \frac{1}{4}x_2 &\leq 25 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

2.

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &= 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

3.

$$\min z = 400x_1 + 300x_2$$

$$\begin{aligned} 50x_1 + 100x_2 &\leq 1800000 \\ 7x_1 + 8x_2 &\geq 168000 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

4.

$$\min z = 10x_2 + 5x_3 + 10x_5$$

$$\begin{aligned} 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 100 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 180 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Řešení

1.

$$\min w = 40u_1 + 60u_2 + 25u_3$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 &\geq 20\\
\frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{4}u_3 &\geq 14\\
u_1, u_2, u_3 &\geq 0\,.
\end{aligned}$$

2.

$$\min w = 12u_1 - 6u_2 + 9u_3$$

$$\begin{aligned}
3u_1 - u_2 - u_3 &\geq 2\\
-u_1 - u_2 + 2u_3 &\geq 1\\
u_1, u_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

u_3 je libovolné.

3.

$$\max w = -1800000u_1 + 168000u_2$$

$$\begin{aligned}
-50u_1 + 7u_2 - u_3 &\leq 400\\
-100u_1 + 8u_2 + 2u_3 &\leq 300\\
u_1, u_2, u_3 &\geq 0\,.
\end{aligned}$$

4.

$$\max w = 100u_1 + 180u_2$$

$$\begin{aligned}
4u_1 &\leq 0\\
3u_1 + u_2 &\leq 10\\
2u_1 + 3u_2 &\leq 5\\
u_1 + 5u_2 &\leq 0\\
6u_2 &\leq 10
\end{aligned}$$

u_1, u_2 jsou libovolná.

2.5 Duálně simplexová metoda

Při simplexové metodě jsme vycházeli z libovolného přípustného bázického řešení a přecházeli jsme postupně na jiná řešení s větší hodnotou účelové funkce. Jako test optimality jsme používali nezápornost vektoru v prvním řádku simplexové tabulky, který je zároveň řešením duální úlohy. Je-li tento vektor nezáporný, říkáme, že bázické řešení je duálně přípustné. Je zřejmé, že je-li nějaké bázické řešení primárně i duálně přípustné, je také optimální.

Často se však setkáváme s případy, kdy nalezené bázické řešení je duálně přípustné, ale není primárně přípustné. V takovém případě by použití simplexové metody vyžadovalo zavedení umělých proměnných. Můžeme ale zvolit jiný postup, při kterém budeme zlepšovat řešení duální úlohy, a to tak dlouho, dokud nedostaneme bázické řešení, které je primárně i duálně přípustné (a tedy optimální). Postup, který při tom používáme, se nazývá **duálně simplexová metoda**.

Na duálně simplexovou metodu můžeme nahlížet jako na "zrcadlový obraz" simplexové metody. Při řešení úlohy duálně simplexovou metodou totiž provádíme stejné operace, jako kdybychom řešili příslušnou duální úlohu simplexovou metodou. Až na to, že příslušnou duální úlohu nemusíme sestrojit přímo. Z toho vyplývá, že budeme postupovat opačným způsobem než při simplexové metodě. Nejdříve určujeme proměnnou opouštějící bázi a pak teprve proměnnou vstupující do báze. Přechod k novému duálně přípustnému bázickému řešení je úplně stejný jako u simplexové metody. Po konečném počtu kroků dospějeme k optimálnímu řešení, pokud existuje.

Nyní se budeme duálně simplexovým algoritmem zabývat podrobněji.

Algoritmus duálně simplexové metody

Nalezení duálně přípustného bázického řešení
Zavést doplňkové proměnné podle potřeby a sestrojit tak soustavu omezení ve tvaru rovnic, která je ekvivalentní původní soustavě omezení.

Iterační krok

- proměnnou opouštějící bázi určíme tak, že v posledním sloupci simplexové tabulky vybereme bázickou proměnnou s nejmenším záporným koeficientem.

- proměnnou vstupující do báze určíme takto:

  – v daném řádku vybereme všechny záporné koeficienty, které odpovídají nebázickým proměnným

- vypočteme podíly prvků prvního řádku simplexové tabulky a vybraných koeficientů ležících ve stejném sloupci
- do báze vstoupí proměnná, na kterou připadne maximální z těchto podílů

- určíme nové bázické řešení.

Test optimality
Výpočet končí, jestliže všechny koeficienty v posledním sloupci simplexové tabulky nabývají nezáporných hodnot.

Ilustrační příklad
Pomocí duálně simplexové metody řešte úlohu

$$\max z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3$$

$$\begin{array}{rrrrl} y_1 & & + & 3y_3 & \geq 300 \\ & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq 500 \\ & & & y_1, y_2, y_3 & \geq 0\,. \end{array}$$

Řešení
Převedeme nerovnice na rovnice přidáním doplňkových proměnných y_1', y_2'

$$\begin{array}{rrrrrrl} -y_1 & & - & 3y_3 & + \; y_1' & & = -300 \\ & - \; 2y_2 & - & 2y_3 & & + \; y_2' & = -500 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} y_1, y_2, y_3 & \geq 0 \\ y_1', y_2' & \geq 0\,. \end{array}$$

Poté provedeme zápis do simplexové tabulky a vybíráme proměnnou, která bázi opouští a tu, která do ní vstupuje

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
$-z$	4	12	18	0	0	0
y_1'	-1	0	-3	1	0	-300
y_2'	0	-2	-2	0	1	-500

Z báze vystupuje proměnná y'_2 $(-500 < -300)$. Vybíráme maximální z poměrů $-\frac{18}{2}$ a $-\frac{12}{2}$, takže do báze vstupuje proměnná y_2. Nová simplexová tabulka má tvar:

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
$-z$	4	0	6	0	6	-3000
y_1'	-1	0	-3	1	0	-300
y_2	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	250

Z báze vystupuje proměnná y_1'. Výběr maximálního z poměrů $-\frac{6}{3}$ a $-\frac{4}{1}$ určuje y_3 jako proměnnou vstupující do báze. Nová simplexová tabulka má tvar:

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
$-z$	2	0	0	2	6	-3600
y_3	-1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	100
y_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	150

Test optimality říká, že výpočet končí. Obdrželi jsme optimální řešení

$$(y_1, y_2, y_3, y_1', y_2') = (0, 150, 100, 0, 0)\,.$$

Podobně jako u simplexové metody můžeme z tabulky identifikovat také optimální řešení duální úlohy $(2, 6, 2, 0, 0)$.

Příklady k procvičení

Řešte úlohu lineárního programování duálně-simplexovou metodou

1.

$$\min z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

2.

$$\min z = 40x_1 + 60x_2 + 25x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\geq 20 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &\geq 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

3.

$$\min z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\geq 24 \\ 3x_1 + 6x_2 &\geq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

4.

$$\min z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Řešení

1. $x = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\ z_{opt.} = \frac{5}{2}$
2. $x = (24, 16, 0, 0, 0)\ z_{opt.} = 1920$
3. $x = \left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}, 0, 0\right)\ z_{opt.} = \frac{114}{5}$
4. $x = \left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}, 0, 0\right) z_{opt.} = \frac{114}{5}$

3 DISTRIBUČNÍ ÚLOHY

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
Mezi úlohy lineárního programování, které zasluhují zvláštní pozornost patří dva základní typy distribučních úloh - a sice dopravní úloha a přiřazovací problém. V obou případech se jedná o úlohu lineárního programování s obzvlášť jednoduchou strukturou matice koeficientů. Obě úlohy je samozřejmě možné řešit simplexovou metodou, která je univerzálním algoritmem pro řešení úloh lineárního programování. Nabízí se ovšem otázka, zda je možné využít jednoduché struktury matice těchto úloh ke konstrukci speciálních algoritmů, které by byly k jejich řešení vhodnější než simplexová metoda.

V následujícím textu se budeme nejdříve věnovat dopravní úloze. Seznámíme se s metodami sloužícími k nalezení jejího výchozího přípustného bázického řešení. Potom poukážeme na souvislost teorie duality s metodou potenciálů, která slouží k nalezení optimálního řešení dopravního problému.

Dále se seznámíme s možností redukovat matici sazeb pro dopravní a přiřazovací problém a popíšeme maďarskou metodu řešení přiřazovacího problému, která redukce matice sazeb využívá.

3.1 Dopravní problém

Obecná formulace dopravní úlohy je analogií ke konkrétní úloze z úvodní kapitoly. Je dáno m výchozích stanic (podle situace to mohou být sklady, výrobní podniky atd.), které nazveme dodavateli, označíme je $D_1, \ldots, D_m$, u nichž je uložen určitý druh zboží v množstvích $a_1, \ldots, a_m$. Toto zboží je potřeba dopravit do n koncových stanic, které nazveme spotřebiteli a označíme je $S_1, \ldots, S_n$, jejichž požadavky činí $b_1, \ldots, b_n$ jednotek daného zboží. Předpokládá se, že nabídka dodavatelů se rovná poptávce spotřebitelů, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \, .$$

Dále jsou známy dopravní náklady na přepravu jednotky zboží od kteréhokoli dodavatele ke kterémukoli spotřebiteli a předpokládáme, že dopravní náklady jsou konstantní, nezávislé na přepravovaném množství zboží (tzn., že náklady na dopravu na každé trase jsou přímo úměrné přepravenému množství). Dopravní náklady od i-tého dodavatele k j-tému spotřebiteli značíme symbolem c_{ij}. Úkolem je stanovit takový dopravní plán, aby byly splněny požadavky spotřebitelů při dané nabídce dodavatelů a náklady na dopravu byly minimální.Výchozí údaje se zapisují do tabulky ve tvaru

	S_1	S_2	...	S_n	
D_1	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
D_2	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
D_m	c_{m1}	c_{2m}		c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	

Označíme-li symbolem x_{ij} množství přepravené od i-tého dodavatele k j-tému spotřebiteli, můžeme matematicky vyjádřit tuto úlohu ve tvaru

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
x_{11} & + & \dots & + & x_{1n} & & & & & & & & & & & = & a_1 \\
 & & & & & x_{21} & + & \dots & + & x_{2n} & & & & & & = & a_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & x_{m1} & + & \dots & + & x_{mn} & = & a_m \\
x_{11} & + & & & & x_{21} & + & & & & x_{m1} & & & & & = & b_1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & x_{1n} & & & & + & x_2 & & & & + & x_{mn} & = & b_n
\end{array}
$$

$$x_{ij} \quad \geq \quad 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n\,.$$

Rovnice v této úloze nejsou nezávislé. Jedna z nich vyplývá z ostatních. Např. sečteme-li prvních m rovnic a odečteme-li od tohoto součtu $n-1$ rovnic ze zbylých, dostaneme vždy tu, kterou jsme vynechali. Podobně to platí i naopak - tj. sečteme-li n posledních rovnic a odečteme-li od tohoto součtu $m-1$ rovnic ze zbylých, dostaneme vždy tu, kterou jsme vynechali. Ze speciální struktury matice soustavy dále vyplývá, že vypustíme-li ze soustavy dvě libovolné rovnice, pak žádnou z nich není možné vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících rovnic.

3.1.1 Určení výchozího bázického přípustného řešení

Ze skutečnosti, že v soustavě rovnic popisující dopravní problém je $m+n-1$ nezávislých rovnic, vyplývá, že výchozí přípustné bázické řešení bude mít $m+n-1$ nenulových složek v případě, že je nedegenerované. Pro jeho nalezení používáme metody, které využívají speciální struktury soustavy omezení dopravního problému.

Metoda severozápadního rohu

Tato metoda určí přípustné bázické řešení zcela mechanicky bez zřetele na hodnoty sazeb c_{ij}. Je velmi jednoduchá a rychlá, ale výchozí přípustné bázické řešení, které pomocí ní nalezneme, není obvykle příliš dobré.

Při této metodě postupujeme z levého horního (severozápadního) rohu tabulky do pravého dolního rohu tabulky, přičemž se snažíme obsadit příslušná pole co největší hodnotou. Začínáme tedy proměnnou x_{11}, které přiřadíme co největší hodnotu, tj.$x_{11} = min\{a_1, b_1\}$. Dále, jestliže x_{ij}byla poslední vybraná bázická proměnná, vybíráme jako další proměnnou $x_{i,j+1}$, jestliže i-tý zdroj ještě nebyl zcela vyčerpán. V opačném případě vybíráme jako další proměnnou $x_{i+1,j}$.

Příklad

Pomocí metody severozápadního rohu najděte výchozí přípustné bázické řešení dopravního problému daného tabulkou:

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	^{3}	^{5}	^{2}	^{1}	50
D_2	^{4}	^{7}	^{5}	^{3}	70
D_3	^{2}	^{9}	^{6}	^{4}	90
	30	40	40	100	210

Řešení

Začneme přiřazením $x_{11} = 30$, čímž je uspokojena poptávka prvního spotřebitele a první sloupec tedy vylučujeme z dalších úvah. První zdroj nebyl zcela vyčerpán, a tak vybíráme jako další bázickou proměnnou proměnnou $x_{1,1+1} = x_{12} = 20$. Tím je první zdroj vyčerpán a pokračujeme přiřazením $x_{1+1,2} = x_{12} = 20$. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, získáme výchozí přípustné bázické řešení uvedené v tabulce:

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	30 ^{3}	20 ^{5}	- ^{2}	- ^{1}	50
D_2	- ^{4}	20 ^{7}	40 ^{5}	10 ^{3}	70
D_3	- ^{2}	- ^{9}	- ^{6}	90 ^{4}	90
	30	40	40	100	210

Hodnota účelové funkce v tomto výchozím bázickém řešení je 920. Výhodou této metody je rychlost, nevýhodou je, že nepřihlížíme k velikosti sazeb za dopravu.

Vogelova metoda

I když metoda severozápadního rohu umožňuje rychlé nalezení výchozího přípustného bázického řešení, je tato její dílčí výhoda zcela eliminována skutečností, že při obsazování polí nebylo přihlíženo k jednotlivých sazbám. Z těchto důvodů je hodnota účelové funkce v tomto řešení obvykle „velmi vzdálená“ optimální hodnotě. Proto budeme dále věnovat pozornost Vogelově metodě, která sice neumožňuje nalézt výchozí přípustné bázické řešení tak rychle jako u metody severozápadního rohu, ale dává v naprosté většině případů mnohem lepší aproximaci optimálního řešení. Její podstata je následující:

Pro každý řádek a sloupec simplexové tabulky vypočteme rozdíl mezi nejmenší a druhou nejmenší sazbou. Tyto rozdíly zapisujeme za příslušný řádek a pod příslušný sloupec. V řádku nebo sloupci s největším rozdílem hledáme pozici s nejnižší sazbou, kterou je nutné obsadit co největší možnou hodnotou, protože v opačném případě by obsazené pole s nejbližší vyšší hodnotou způsobilo poměrně značné zvýšení hodnoty účelové funkce. Jestliže obdržíme více stejných rozdílů pro dané sloupce nebo řádky, hledáme tzv. sedlový bod. To je bod s nejnižší sazbou z hlediska řádku i sloupce. Obdržíme-li více sedlových bodů, volíme ten, jemuž přísluší vyšší součet řádkové a sloupcové diference mezi jednotlivými sazbami.

Příklad

Vogelovou metodou najděte výchozí přípustné bázické řešení dopravního problému daného tabulkou

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	^{3}	^{5}	^{2}	^{1}	50
D_2	^{4}	^{7}	^{5}	^{3}	70
D_3	^{2}	^{9}	^{6}	^{4}	90
	30	40	40	100	210

Řešení

Při řešení začneme výpočtem řádkových a sloupcových diferencí. Je potřeba si uvědomit, že při postupném obsazování políček v tabulce některé diference přestanou být aktuální a je nutné pro příslušné řádky či sloupce vypočítat nové. Diference, které přestaly být aktuální, jsou přeškrtnuty a za (pod) nimi jsou vypočteny aktuální hodnoty.

Nejvyšší obdržená diference má hodnotu 3 a platí pro třetí sloupec. Obsadíme tedy pole $(1,3)$ nejvyšší možnou hodnotou, tj. $x_{13} = 40$. Tím je vyčerpána poptávka třetího spotřebitele a třetí sloupec vyloučíme z dalších úvah. Zároveň je nutné přepočítat všechny řádkové diference, protože již nejsou aktuální. Po přepočtu jsme získali největší diferenci 2 v prvním řádku a prvním a druhém sloupci. Hledáme tedy sedlový bod, kterým je pozice $(1,4)$ a klademe $x_{14} = 10$. Nyní je pro změnu nutné přepočítat všechny sloupcové diference, protože kapacita prvního dodavatele byla vyčerpána. Opět máme hodnotu nejvyšší diference 2 a hledáme sedlový bod, kterým je pozice $(3,1)$, a tedy $x_{3,1} = 30$. Přepočet řádkových diferencí dává nejvyšší hodnotu 5 pro třetí řádek a klademe $x_{34} = 60$. Další postup je vynucen.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	- ^{3}	- ^{5}	40^2	10 ^{1}	50
D_2	- ^{4}	40 ^{7}	- ^{5}	30 ^{3}	70
D_3	30 ^{2}	- ^{9}	- ^{6}	60 ^{4}	90
	30	40	40	100	210

Hodnota účelové funkce v obdrženém výchozím přípustném bázickém řešení je 760.

Poznámka

Metoda severozápadního rohu a Vogelova metoda slouží k nalezení výchozího přípustného bazického řešení, nikoli optimálního řešení dopravního problému.

3.1.2 Simplexový algoritmus pro dopravní problém

Než se budeme věnovat otázce, jak určit u dopravního problému proměnnou vstupující do báze a proměnnou opouštějící bázi, všimněme si, co by nastalo, kdybychom některé z políček, které přísluší nebázickým proměnným, obsadili nenulovou hodnotou. Uvažujme úlohu z předchozího odstavce a její bázické řešení získané metodou severozápadního rohu, viz tabulka:

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	30 ^{3}	20 ^{5}	- ^{2}	- ^{1}	50
D_2	- ^{4}	20 ^{7}	40 ^{5}	10 ^{3}	70
D_3	- ^{2}	- ^{9}	- ^{6}	90 ^{4}	90
	30	40	40	100	210

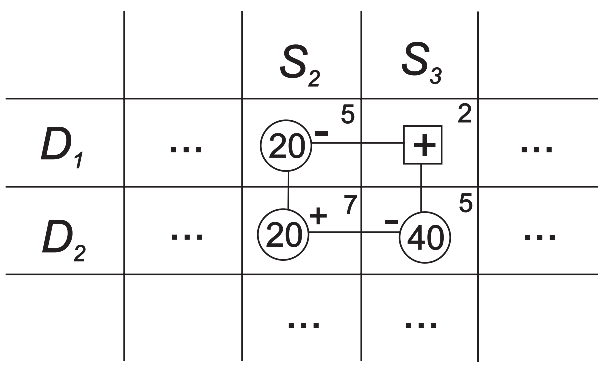
Přesuňme nenulové množství zboží na pozici $(1,3)$, např. $x_{13} = 1$. Tato změna si vynutí následující řetězec změn na dalších políčkách tabulky. Hodnota proměnné

- x_{12} poklesne z 20 na 19,

- x_{22} vzroste z 20 na 21,
- x_{23} poklesne z 40 na 39.

Mohlo by se zdát, že v úvahu přichází ještě možnost změny hodnoty proměnné x_{11} z 30 na 29. Tato změna by si však vyžádala obsazení některé z pozic $(1,2)\,,(1,3)$ hodnotou 1. To by bylo v rozporu s tím, co obnáší přechod k jinému bázickému řešení, tj. vynulování jedné proměnné (opouštějící bázi) na úkor jiné proměnné (vstupující do báze). V tomto případě by dvě nebázické proměnné nabyly nenulové hodnoty, což by sice vedlo k nalezení přípustného řešení, ale nebázického.

Budeme-li tedy dále zkoumat změnu proměnných $x_{13}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$, zjistíme, že se u nich řetězec změn uzavřel, tj. jinými slovy případná jiná změna hodnoty proměnné x_{13} se projeví pouze změnou hodnot x_{12}, x_{22}, x_{23}, zatímco hodnota ostatních bázických proměnných se nezmění. Tento řetězec změn nazýváme uzavřeným okruhem a v tabulce dopravního problému ho můžeme názorně vyznačit, viz obrázek 9. Lze ukázat, že pro každé neobsazené políčko v tabulce problému existuje právě jeden uzavřený okruh.



Obrázek 9: Uzavřený okruh

Napišme původní hodnoty proměnných, které tvoří uzavřený okruh, do posloupnosti podle následujícího klíče - na prvním místě bude proměnná x_{13} a každý další člen se bude od předchozího lišit pouze v jednom indexu. To dává dvě možnosti uspořádaní:

$$\begin{aligned}(x_{13}, x_{12}, x_{22}, x_{23}) &= (0, 20, 20, 40)\\(x_{13}, x_{23}, x_{22}, x_{12}) &= (0, 40, 20, 20)\ .\end{aligned}$$

Případná změna prvního členu posloupnosti, tj. nárůst proměnné x_{13}, vyvolá pokles o stejnou hodnotu u všech sudých členů posloupnosti a nárůst o stejnou hodnotu u všech dalších lichých členů (všimněme si, že až na pořadí jsou liché a sudé členy určeny jednoznačně). Protože proměnné x_{ij} mají být nezáporné, může na sudých místech posloupnosti dojít k poklesu o hodnotu rovnající se minimální hodnotě z těchto proměnných, v našem případě $\min\{20, 40\} = 20$.

Na pozici $(1, 3)$ můžeme tedy přesunout hodnotu 20 s následujícím výsledkem $(x_{13}, x_{12}, x_{22}, x_{13}) = (20, 0, 40, 20)$, což dává spolu s ostatními proměnnými jiné bázické řešení a ve vztahu k interpretaci dopravní úlohy také ekvivalentní přepravní plán z hlediska uspokojení poptávky a nabídky.

Zbývá zjistit, zda tato změna vyvolá zvýšení či snížení hodnoty účelové funkce. To lze zjistit snadno porovnáním nákladů na lichých a sudých pozicích, v našem případě $2 + 7 < 5 + 5$. Rozdíl činí 1 ve prospěch lichých pozic a znamená to, že přesunem ušetříme za každou jednotku přepravovaného zboží jednu jednotku finančních nákladů.

Z uvedeného postupu je nyní zřejmé, jak vypadá iterační krok. Ke každému volnému políčku najdeme příslušný uzavřený okruh (je dán jednoznačně). Vypočteme rozdíl mezi původním a ekvivalentním přepravním plánem a volíme jako proměnnou vstupující do báze tu, na kterou připadne největší z těchto rozdílů (je zřejmé, že bereme v úvahu pouze rozdíly vedoucí ke zlepšení hodnoty účelové funkce). Tento postup je však pracný a zdlouhavý. Je při něm nutné určit uzavřené okruhy ke každému volnému políčku. Tyto okruhy mohou být u větších úloh značně komplikované. V dalším odstavci proto odvodíme výpočetně jednodušší metodu, které se říká metoda potenciálů.

Úkol k procvičení

I u metody potenciálů se využívá uzavřených okruhů, i když ne v takové míře, jako u výše uvedeného postupu. Je tedy vhodné se v jejich hledání procvičit. Nalezněte všechny další uzavřené okruhy v tabulce, které přísluší nebázickým proměnným.

3.1.3 Metoda potenciálů

Tato metoda je založena na poznatcích o vztazích mezi duálními úlohami. Sestrojme tedy duální úlohu k dopravní úloze. Za tímto účelem označíme duální proměnné přiřazené k řádkovým omezením jako $u_1, ..., u_m$ a proměnné přiřazené sloupcovým omezením jako $v_1, ..., v_n$. Potom bude mít duální úloha tvar

$$\max w = a_1 u_1 + ... + a_m u_m + b_1 v_1 + ... + b_n v_n$$

$$\begin{array}{cccc}
u_1 + v_1 \le c_{11} & u_2 + v_1 \le c_{21} & \dots & u_m + v_1 \le c_{m1} \\
u_1 + v_2 \le c_{12} & u_2 + v_2 \le c_{22} & \dots & u_m + v_2 \le c_{m2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
u_1 + v_n \le c_{1n} & u_2 + v_n \le c_{2n} & \dots & u_m + v_n \le c_{mn}
\end{array}$$

Protože omezení dopravního problému jsou rovnice, mohou duální proměnné nabývat i záporných hodnot. Podle věty 4 z kapitoly o dualitě musí být při optimálním řešení jedno z dvojice duálních omezení splněno jako rovnost. Tedy, máme-li nenulovou složku přípustného bázického řešení $x_{ij} > 0$, pak příslušné omezení je splněno jako rovnost, tj. $u_i + v_j = c_{ij}$.

Protože v nedegenerované dopravní úloze má bázické řešení $m + n - 1$ nenulových složek, dostáváme $m + n - 1$ rovnic. Tato soustava obsahuje všech $m + n$ neznámých u_i, v_j, což plyne z toho, že vkaždém řádku či sloupci je alespoň jedna bázická proměnná. Máme tedy možnost jednu proměnnou zvolit libovolně a ostatní dopočítat postupným dosazováním do soustavy rovnic. Plyne to z vlastnosti bázického řešení nedegenerované úlohy, že žádná bázická proměnná není sama současně v řádku i sloupci a na druhé straně alespoň jedna je sama v řádku nebo sloupci.

Po vypočtení proměnných u_i, $i = 1, .., m$ a v_j, $j = 1, .., n$ ověřujeme, zda jsou všechna omezení duální úlohy splněna, tj. zda platí $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Pokud platí pro některá i, j, že $u_i + v_j > c_{ij}$, nemáme optimální řešení. Řešení je pak možné zlepšit dosazením proměnné x_{ij} do řešení. Uvedené skutečnosti shrneme do věty.

Věta
Řešení $X = \{x_{ij}\}$ dopravní úlohy je optimální právě tehdy, když existují čísla $u_1, \ldots, u_m$ a $v_1, \ldots v_n$ (nazývaná potenciály) takové, že podmínky

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

nazývané kritéria optimality, platí pro všechna i, j .

Na základě výše provedených úvah můžeme sestavit následující postup při zlepšování řešení dopravního problému:

1. Sestavit soustavu rovnic, jejímž řešením jsou potenciály u_i a v_j.
2. Vepsat do volných políček příslušné součty $u_i + v_j$.
3. Zjistit, zda v některých políčkách platí $u_i + v_j > c_{ij}$.
4. V dalším kroku jedno z těchto políček obsadit, a to nejlépe políčko, pro něž je hodnota $u_i + v_j - c_{ij}$ největší, tímto způsobem:
   (a) sestavit uzavřený okruh příslušný k tomuto políčku,
   (b) zjistit nejmenší hodnotu na sudých políčkách v okruhu - toto číslo odečíst od všech hodnot v sudých políčkách a přičíst ke všem hodnotám v lichých políčkách.

Řešme tedy úlohu danou tabulkou, máme-li její výchozí přípustné bázické řešení nalezené metodou severozápadního rohu.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	30 ^{3}	20 ^{5}	- ^{2}	- ^{1}	50
D_2	- ^{4}	20 ^{7}	40 ^{5}	10 ^{3}	70
D_3	- ^{2}	- ^{9}	- ^{6}	90 ^{4}	90
	30	40	40	100	210

Nenulových hodnot nabývají proměnné $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ a x_{34}. Pro tento případ obdržíme soustavu šesti rovnic

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 3 \\ u_1 + v_2 &= 5 \\ u_2 + v_2 &= 7 \\ u_2 + v_3 &= 5 \\ u_2 + v_4 &= 3 \\ u_3 + v_4 &= 4. \end{aligned}$$

Zvolíme $u_2 = 0$ a postupným dosazováním vypočteme hodnoty ostatních proměnných. Součty $u_i + v_j$, odpovídající jednotlivým políčkům, jsou vepsány v levém dolním rohu těchto políček. Dostáváme následující tabulku rozšířenou o hodnoty proměnných u_i, v_j.

	S_1	S_2	S_3	S_4		u_i
D_1	30 ^{3}	20 ^{5}	$_3$ ^{2}	$_1$ ^{1}	50	-2
D_2	$_5$ ^{4}	20 ^{7}	40 ^{5}	10 ^{3}	70	0
D_3	$_6$ ^{2}	$_8$ ^{9}	$_6$ ^{6}	90 ^{4}	90	1
	30	40	40	100	210	
v_j	5	7	5	3		

Nerovnost $u_i + v_j > c_{ij}$ platí pro políčka $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$ a největší rozdíl $u_i + v_j - c_{ij}$ obdržíme pro políčko $(3,1)$.

Uzavřený okruh tvoří proměnné

$$(x_{31}, x_{34}, x_{24}, x_{22}, x_{21}, x_{11}) = (0, 90, 10, 20, 20, 30)\,,$$

přičemž minimální hodnota na sudých pozicích je 20 a odečteme-li ji od všech hodnot v sudých políčkách a přičteme ke všem hodnotám v lichých políčkách dostaneme

$$(x_{31}, x_{34}, x_{24}, x_{22}, x_{21}, x_{11}) = (20, 70, 20, 0, 40, 10)\ .$$

Obdrželi jsme nové bázické řešení dané tabulkou:

	S_1	S_2	S_3	S_4		u_i
D_1	10^{3}	40^{5}	$_{7}\ ^{2}$	$_{5}\ ^{1}$	50	2
D_2	$_{1}\ ^{4}$	$_{3}\ ^{7}$	40^{5}	30^{3}	70	0
D_3	20^{2}	$_{4}\ ^{9}$	$_{6}\ ^{6}$	70^{4}	90	1
	30	40	40	100	210	
v_j	1	3	5	3		

Proces dále pokračuje, dokud nenajdeme optimální řešení. Dále uvádíme jen jednotlivé tabulky a příslušné okruhy jako vodítko. Sestavení rovnic včetně výpočtu hodnot potenciálů ponecháváme čtenáři jako cvičení. V dalším kroku hledáme uzavřený okruh pro políčko $(1, 3)$. Tvoří jej proměnné

$$(x_{13}, x_{11}, x_{31}, x_{34}, x_{24}, x_{23}) = (0, 10, 20, 70, 30, 40)\ .$$

Nové bázické řešení má tvar:

	S_1	S_2	S_3	S_4		u_i
D_1	$_{-2}\ ^{3}$	40^{5}	10^{2}	$_{0}\ ^{1}$	50	-3
D_2	$_{1}\ ^{4}$	$_{8}\ ^{7}$	30^{5}	40^{3}	70	0
D_3	30^{2}	$_{9}\ ^{9}$	$_{6}\ ^{6}$	60^{4}	90	1
	30	40	40	100	210	
v_j	1	8	5	3		

V posledním iteračním kroku sestavujeme uzavřený okruh pro políčko $(2, 2)$. Tvoří jej proměnné

$$(x_{22}, x_{23}, x_{13}, x_{12}) = (0, 30, 10, 40)\ .$$

Optimální bázické řešení má tvar:

	S_1	S_2	S_3	S_4		u_i
D_1	$_{-1}\ ^{3}$	10^{5}	40^{2}	$_{1}\ ^{1}$	50	-2
D_2	$_{1}\ ^{4}$	30^{7}	$_{2}\ ^{5}$	40^{3}	70	0
D_3	30^{2}	$_{8}\ ^{9}$	$_{3}\ ^{6}$	60^{4}	90	1
	30	40	40	100	210	
v_j	1	7	2	3		

Příklady k procvičení

U následujících dopravních úloh

- nalezněte výchozí přípustné bázické řešení metodou severozápadního rohu,
- nalezněte výchozí přípustné bázické řešení Vogelovou metodou,
- použijte lepší řešení a metodou potenciálů nalezněte optimální řešení.

Jsou-li přepravní údaje zadány následující tabulkou

1.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	nabídka
D_1	8	6	3	7	5	20
D_2	5	13	8	4	7	30
D_3	6	3	9	6	8	30
D_4	0	0	0	0	0	20
poptávka	25	25	20	10	20	

2.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	nabídka
1	4	7	5	2	6	4
D_2	6	4	13	7	3	6
D_3	7	5	2	8	5	6
D_4	0	0	0	0	0	4
poptávka	4	5	5	4	2	

3.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	nabídka
D_1	20	39	58	26	44	0	5
D_2	26	90	42	28	32	0	6
D_3	0	12	22	6	90	0	7
D_4	18	22	46	36	38	0	4
D_5	48	56	72	60	68	0	3
poptávka	5	6	5	3	4	2	

Řešení doplnit!

3.2 Redukce matice sazeb

Nechť je dán vyrovnaný dopravní problém

$$min\, z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

při omezeních

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \\ x_{ij} &\geq 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Upravme nyní matici sazeb $(c_{ij}) = C$ tak, že v každém řádku přičteme k sazbám určité číslo α_i a podobně v každém sloupci přičteme k sazbám určité číslo β_j. Místo původní matice dostaneme pozměněnou matici sazeb $C = (c_{ij} + \alpha_i + \beta_j)$. Nyní vyvstává otázka, zda tato změna má vliv na řešení úlohy.

Změna sazeb se netýká omezení dopravního problému, mění se pouze účelová funkce. Pro novou účelovou funkci platí

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + \alpha_i + \beta_j)\, x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= z + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \, .$$

Protože výraz $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$ je konstanta (její velikost závisí na hodnotách α_i a β_j), znamená to, že optimální řešení úlohy s pozměněnou účelovou funkcí bude stejné jako u úlohy původní, s tím rozdílem, že hodnota účelové funkce se zvýší o konstantu $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$. Můžeme proto formulovat následující větu.

Věta 1
Přičteme-li k sazbám v jednotlivých řádcích vyrovnaného dopravního problému libovolná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a k sazbám v jednotlivých sloupcích libovolná čísla $\beta_1, \ldots, \beta_n$, bude mít takto pozměněný problém stejné optimální řešení jako původní problém, ale hodnota účelové funkce se změní o konstantu $\sum \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$.

Tento poznatek využijeme v následujícím odstavci při řešení dopravního problému pomocí tzv. maďarské metody.

3.3 Přiřazovací problém

Přiřazovací problém je speciální případ dopravního problému o stejném počtu řádků a sloupců, u kterého jsou všechna čísla vyjadřující nabídku a poptávku rovna 1, tj. $a_i = 1, i = 1, \dots, m\,, b_j = 1, j = 1, \dots, m$. Řešíme tedy úlohu

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

při omezeních

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \;\; i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= 1, \;\; j = 1, \dots, m \\ x_{ij} &\geq 0, \;\; i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Jedná se o nejjednodušší distribuční úlohu. Mezi její časté aplikace patří např. úloha o přiřazení prací nástrojům a úloha obchodního cestujícího. Řešení přiřazovacího problému je zjevně degenerované. Každé bázické řešení má právě m obsazených políček v tabulce místo potřebných $2m - 1$. Počet všech možných řešení je $m!$ a pro velké hodnoty m je nemožné prověřit všechny možnosti. Nejčastější používanou metodou pro řešení přiřazovacího problému je maďarská metoda, o které pojednáváme v následujícím odstavci.

3.3.1 Maďarská metoda řešení přiřazovacího problému

Maďarská metoda využívá skutečnosti, že optimální řešení úlohy zůstane nezměněno (až na hodnotu účelové fce), pokud se provede redukce matice sazeb. Při řešení provádíme takovou redukci, která vede k vytvoření nul v redukované matici C'. Políčka odpovídající nulám v matici C' odpovídají totiž minimálním hodnotám v matici původní C, tj. jsou to očekávané složky optimálního řešení. Můžeme samozřejmě obdržet více nul, ze kterých je nutné vybírat, nebo naopak nedostatečný počet nul (je nutné provést další redukci).

Podstata algoritmu navrženého Kuhnem spočívá v hledání maximálního počtu nezávislých nul v matici C a jejích případných redukcích.

Definice 1 Nulové prvky matice C typu nxn nazveme nezávislé, pokud se nachází v různých řádcích a sloupcích (tj. v každém řádku a v každém sloupci může ležet pouze jedna nezávislá 0).

V dalším budeme některé řádky a sloupce matice značit znaménkem +. Prvky, které leží v takto označených řádcích popř. sloupcích nazveme označené. Postup při označování prvků vysvětlíme v algoritmu.

Algoritmus maďarské metody
Přípravná etapa
V každém sloupci matice C typu nxn nalezneme minimální prvek a odečteme ho od všech ostatních prvků v daném sloupci. Potom v každém řádku nalezneme minimální prvek a odečteme ho od všech ostatních v daném řádku. Tím dostáváme matici, kterou budeme značit symbolem C_0. Tato matice obsahuje v každém řádku a v každém sloupci alespoň jednu 0.

V prvním sloupci najdeme 0 a označíme ji *. Potom postupně v dalších sloupcích zkoumáme nuly, které neleží v řádcích obsahujících 0^*. Tyto nuly rovněž označíme symbolem *. V každém ze sloupců vybíráme pouze jednu nulu, u které děláme *. Pak nuly označené hvězdičkou tvoří nezávislý systém nul.

V případě, že počet nezávislých nul je n , algoritmus končí. V opačném případě přecházíme k jednotlivým iteracím, tj. v případě, kdy při k-té iteraci matice C_k obsahuje méně než n nezávislých 0^*, přecházíme ke $(k+1)$ iteraci. Před začátkem každé z iterací označíme znaménkem + všechny sloupce matice C_k, které obsahují 0^*.

Poznámka
V průběhu algoritmu maďarské metody děláme u některých nul hvězdičky a u jiných zase čárky. V souvislosti s tím hovoříme z jazykových důvodů o označování nul hvězdičkou nebo čárkou. Je potřeba si ale uvědomit, že označenost ve smyslu předchozí definice znamená, že daná nula leží v řádku či sloupci se znaménkem +, a ne to, zda jsme u ní udělali hvězdičku nebo čárku.

Iterace se skládá ze tří kroků

1. V případě, že mezi neoznačenými prvky matice C_k neexistují nuly, přejdeme ke kroku č. 3. V opačném případě mohou nastat dvě možnosti:

   (a) Řádek, který obsahuje neoznačený nulový prvek, obsahuje zároveň 0^*. Takovou neoznačenou 0 označíme čárkou $(0')$ a současně označíme příslušný řádek zprava znaménkem + a zrušíme znaménko + nad sloupcem, ve kterém leží daná 0^*, tím, že ho dáme do kroužku.

(b) Řádek, který obsahuje neoznačenou nulu, neobsahuje 0^*. Potom tuto nulu označíme čárkou a přejdeme ke 2. kroku.

2. Vycházíme z $0'$ v řádku, který obsahuje 0^* (případ 1b), a vytvoříme řetězec z nulových prvků matice C_k takto:
   od $0'$, nalezené v obodě (1b), k 0^*(pokud existuje), která se nachází ve stejném sloupci, a dále od 0^* k $0'$, která se nachází ve stejném řádku. Jinými slovy, řetězec vede od $0'$ k 0^* po sloupcích, od 0^* k $0'$ po řádcích. Při vytváření řetězce začínáme a končíme vždy v $0'$. Po vytvoření řetězce zaměníme na tomto řetězci $0'$ za 0^* a naopak. Tím se počet nezávislých nul zvětší o jednu a pokud je jejich počet menší než n, přejdeme znovu ke kroku 1.

3. K tomuto kroku přecházíme tehdy, když po 1. kroku máme všechny nuly označené (případ 1a). Z neoznačených prvků matice C_k vybereme minimální a jeho hodnotu odečteme od všech prvků matice C_k ležících v jejích neoznačených řádcích a přičteme ke všem jeho prvkům matice C_k ležícím v označených sloupcích. Dostáváme matici C_k', která obsahuje alespoň jednu neoznačenou nulu. Znovu přejdeme k 1. kroku.
   Poznamenáváme, že při přechodu od matice C_k k C_k' přenášíme všechna označení z C_k do C_k'.

Iterace končí vždy po 2. kroku jehož výsledkem je matice C_{k+1}.

Smysl označování řádků a sloupců matice znaménkem + vyplývá z následující věty

Věta 1 (KUHN)
Maximální počet nezávislých nul, které můžeme v dané matici C typu nxn vybrat se rovná minimálnímu počtu znamének +, kterými je možné označit všechny její nulové prvky.

Důkaz

Nechť minimální počet znamének + je p, přičemž z toho je r pro řádky a s pro sloupce, čili $r + s = p$. Počet nezávislých nul nemůže být větší než p, protože v každém řádku a sloupci může být jen jedna nezávislá 0.

Naopak nezávislé nuly, které jsou obsaženy v r označených řádcích, musí ležet ve zbývajících sloupcích. Kdyby to tak nebylo, tj. pokud by ležely v $k < s$ sloupcích, potom by $r + k$ řádků stačilo na pokrytí všech nul v matici, což je v rozporu s předpokladem, že p je minimální počet znamének. Tj. kromě nezávislých nul ležících v r označených řádcích musí být ještě s nezávislých nul ve sloupcích. Protože podobně můžeme argumentovat i v opačném pořadí, čili dokázat, že kromě nezávislých nul v s sloupcích musí být r nezávislých nul v řádcích, znamená to, že počet nezávislých nul nemůže být menší než $r + s$.

Protože větší nemůže být, rovná se přesně $r + s = p$.

Poznámka

Algoritmus bude podobný také pro úlohu, v níž se účelová funkce maximalizuje. Rozdíl je v tom, že v přípravné etapě nejdříve vybereme maximální prvek a každé číslo v daném sloupci od tohoto prvku odečteme. Potom nalezneme minimální prvek v každém řádku a odečteme jej od všech ostatních (v příslušném řádku). Dále pokračujeme stejně.

Výběr maximálního prvku a odčítání ostatních prvků od tohoto prvku je ekvivalentní s převrácením znamének (čímž převádíme maximalizační úlohu na minimalizační nebo naopak), výběrem minimálního prvku (který je záporný) a jeho následným odečtením od všech ostatních.

Příklad

Stavební podnik má k dispozici 7 jeřábů, které má přepravit na jiná pracoviště. Vzdálenosti mezi stanovišti jeřábů a jejich novými pracovišti jsou dány v následující matici. Úkolem je nalézt plán přepravy jeřábů, při kterém by bylo ujeto nejméně kilometrů. Řádky matice představují jednotlivá nová pracoviště, sloupce pak původní stanoviště.

		nové pracoviště						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	16	27	28	9	14	5	17
	2	17	19	16	18	15	10	11
současné	3	20	16	19	9	18	11	17
stanoviště	4	21	13	12	11	14	8	18
	5	22	11	12	4	17	13	14
	6	20	13	16	12	19	8	11
	7	25	11	17	9	21	14	12

Řešení

Výsledkem přípravné etapy, ve které provádíme redukci matice sazeb, je matice C_0. Po provední sloupcové redukce bylo nutné provést ještě řádkovou redukci v případě třetího řádku.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} + & \oplus & + & & + & & + \end{array} \\
C_0= & \left(\begin{array}{ccccccc}
0^* & 16 & 16 & 5 & 0 & 0 & 6 \\
1 & 8 & 4 & 14 & 1 & 5 & 0^* \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0^* & 2 & 2 \\
5 & 2 & 0^* & 7 & 0 & 3 & 7 \\
6 & 0^* & 0 & 0' & 3 & 8 & 3 \\
4 & 2 & 4 & 8 & 5 & 3 & 0 \\
9 & 0' & 5 & 5 & 7 & 9 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ + \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Protože jsme nalezli jen 5 nezávislých nul, přejdeme k první iteraci. Na matici C_0 aplikujeme 1. a 2. krok. Procházíme-li prvky ve čtvrtém sloupci, najdeme neoznačenou 0 na pozici $(5,4)$. Podle (1a) označímte tutu 0 čárkou a rušíme znaménko + nad druhým sloupcem a pátý řádek označíme znaménkem +. Dále procházíme druhý sloupec (nyní je neoznačený) a nacházíme v něm neoznačenou 0 na pozici $(7,2)$. Podle (1b) označíme tuto nulu čárkou a přecházíme ke 2. kroku. Vytváříme řetězec složený z pozic $(7,2)\,,(5,2)\,,(5,4)$. Zaměněním 0’ za 0* obdržíme matici C_1.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} \oplus & + & \oplus & \oplus & \oplus & & + \end{array} \\
C_0= & \left(\begin{array}{ccccccc}
0^* & 16 & 16 & 5 & 0 & 0' & 6 \\
1 & 8 & 4 & 14 & 1 & 5 & 0^* \\
0' & 1 & 3 & 1 & 0^* & 2 & 2 \\
5 & 2 & 0^* & 7 & 0' & 3 & 7 \\
6 & 0' & 0 & 0^* & 3 & 8 & 3 \\
4 & 2 & 4 & 8 & 5 & 3 & 0 \\
9 & 0^* & 5 & 5 & 7 & 9 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} + \\ \\ + \\ + \\ + \\ \\ \\ \end{array} \sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & + & & & & & + \end{array} \\
\sim C_1'= & \left(\begin{array}{ccccccc}
0^* & 17 & 16 & 5 & 0 & 0' & 7 \\
0' & 8 & 3 & 13 & 0 & 4 & 0^* \\
0' & 2 & 3 & 1 & 0^* & 2 & 3 \\
5 & 3 & 0^* & 7 & 0' & 3 & 8 \\
6 & 1 & 0 & 0^* & 3 & 8 & 4 \\
3 & 2 & 3 & 7 & 4 & 2 & 0' \\
8 & 0^* & 4 & 4 & 6 & 8 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Protože nezávislých nul je stále méně než je požadovaný počet 7, přecházíme k další iteraci. Postupně nacházíme neoznačené nuly na pozicích $(1,6)\,,(3,1)$ a

$(4,5)$. Ve všech případech nastává situace (1a), tj. rušíme + nad příslušným sloupcem a děláme + za příslušný řádek.

Protože nyní máme všechny 0 označené, přecházíme ke 3. kroku, kdy je nutné vytvořit v matici další 0. Dostáváme tak matici C_1', v níž nacházíme neoznačenou 0 na pozici $(2,1)$ (případ 1a). Dále nacházíme neoznačenou 0 na pozici $(6,7)$, což je případ (1b), a přecházíme ke 2. kroku. Vytváříme řetězec složený z pozic $(6,7)\,,(6,2)\,,(2,1)\,,(1,1)$ a $(1,6)$. Záměnou 0' za 0* získáme matici C_2 obsahující 7 neoznačených 0**.**

$$C_2=\begin{array}{cccccccc}
 & + & & & & & + & \\
\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0^* \\ 0' \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{array}\right. &
\begin{array}{c} 17 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0^* \end{array} &
\begin{array}{c} 16 \\ 3 \\ 3 \\ 0^* \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{array}{c} 5 \\ 13 \\ 1 \\ 7 \\ 0^* \\ 7 \\ 4 \end{array} &
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0^* \\ 0' \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{array} &
\begin{array}{c} 0^* \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \\ 8 \end{array} &
\left.\begin{array}{c} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \\ 0^* \\ 2 \end{array}\right) &
\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Výpočet je u konce. Hodnota účelové funkce v optimálním řešení je 78.

Příklady k procvičení

Pomocí maďarské metody řešte následující přiřazovací problémy:

1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 3 \\ 11 & 10 & 11 & 10 \\ 8 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 15 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 13 & 4 & 15 \\ 9 & 3 & 6 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Sedm dělníků má být přiřazeno k sedmi pracovním úkonům, přičemž každý z nich může vykonávat kteroukoliv práci, ale s různou dovedností. Míra jejich produktivity práce při jednotlivých pracovních úkonech byla vyhodnocena a je dána následující tabulkou:

		pracovní úkon						
		1	2	3	4	5	6	7
	1	18	12	11	13	14	12	13
	2	14	13	10	15	11	9	16
dělník	3	16	8	10	10	12	8	11
	4	13	12	7	11	14	9	13
	5	7	15	14	16	8	6	10
	6	12	15	10	7	12	7	12
	7	12	8	9	13	10	11	16

4. Podnik koupil pět nových strojů, které může umístit do pěti budov, ale do každé z nich pouze jeden. Každý stroj může být umístěn v kterékoliv z budov, ale umístění není vždy stejně výhodné. Míra výhodnosti umístění jednotlivých strojů je dána následující maticí. Stanovte, jak mají být stroje rozmístěny, aby toto rozmístění bylo co nejvýhodnější.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

1. Optimální řešení je 25.
2. doplnit
3. doplnit
4. Optimální řešení je 15.

4 CELOČÍSELNÉ PROGRAMOVÁNÍ

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
Celočíselné programování je poddisciplína lineárního programování, kdy jsou na proměnné vystupující v úlohách kladeny požadavky celočíselnosti. V této kapitole se seznámíte s jednou ze základních metod sloužících k nalezení celočíselného řešení. Jedná se o metodu větví a mezí, která bude nejdříve uvedena v obecné formě a potom modifikována pro smíšenou úlohu lineárního programování.

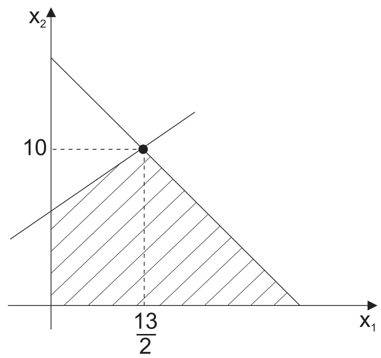
Průvodce studiem
Zatím jsme mlčky předpokládali, že v úlohách lineárního programování dochází ke spojité změně hodnot proměnných. Mnohdy tomu tak ale není. V celé řadě ekonomických úloh je zapotřebí získat řešení, jehož složky jsou celočíselné a proměnné mají reálný smysl jen tehdy, když nabývají celočíselných hodnot. V některých případech je možné získat celočíselné hodnoty prostým zaokrouhlením, ale ve všeobecnosti může takový postup vést k vážným chybám. Uveďme dva příklady, kdy po použití simplexové metody vede zaokrouhlování k nesprávnému výsledku.

Příklad
Řešte úlohu

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq \frac{7}{2} \\ x_1 + x_2 &\leq \frac{33}{2} \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ celočíselná.} \end{aligned}$$

Pomocí simplexové metody obdržíme výsledek $x_1 = \frac{13}{2}$ a $x_2 = 10$. Nelze zaokrouhlovat, protože ani jedno z řešení $(x_1, x_2) = (6, 10)$, popř. $(x_1, x_2) = (7, 10)$, není přípustné. Tuto skutečnost ilustruje následující obrázek, na němž je znázorněna množina přípustných řešení (bez požadavku celočíselnosti) a vyznačeno optimální řešení.



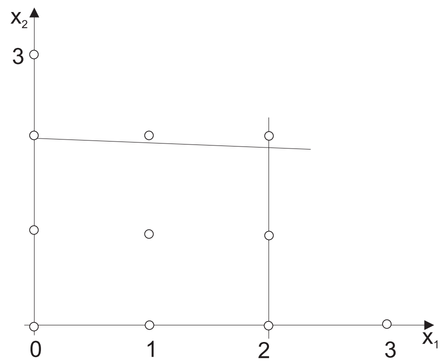
Obrázek 10: Zaokrouhlením vznikne nepřípustné řešení

Příklad
Řešte úlohu

$$\max z = x_1 + 5x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ celočíselná.} \end{aligned}$$

Použití simplexové metody dává výsledek $x_1 = 2$ a $x_2 = \frac{9}{5}$ a $z = 11$. Po zaokrouhlení $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ a hodnota účelové funkce $z = 7$. Poznamenejme ještě, že zaokrouhlení hodnoty $x_2 = \frac{9}{5}$ nahoru by vedlo k nepřípustnému řešení. Ale řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$ dává hodnotu účelové funkce $z = 10$. Zaokrouhlením jsme tedy získali pouze přípustné řešení, ale ne optimální, jak je vidět z následujícího obrázku.



Obrázek 11: Zaoukrouhlení vede pouze k přípustnému řešení

Protože každý ohraničený celočíselný problém má pouze konečně mnoho řešení, je možné je (teoreticky) všechny prověřit. Ovšem už např. při 10 proměnných z nichž každá nabývá 10 hodnot dostáváme velké množství kombinací, které je třeba prozkoumat. Je zapotřebí najít způsob, jak prověřovat jen některé z možností.

4.1 Metoda větví a mezí

Základní myšlenka

Předpokládáme, že hledáme minimum účelové funkce. Dále se předpokládá, že známe horní hranici hodnot účelové funkce (popř. známe horní hranici optimální hodnoty). Poté rozdělíme množinu přípustných řešení do několika podmnožin, čímž získáme jednodušší podúlohy původního problému. Přínos metody spočívá v tom, že nemusíme řešit všechny podúlohy, ale jen některé z nich, a na základě znalosti jejich řešení vyloučíme zbylé úlohy z našich úvah.

Algoritmus metody

1. **Počáteční krok -** označíme symbolem z_H horní hranici hodnot účelové funkce a položíme $z_H = \infty$. Začínáme s celou množinou řešení, která je nutné brát v úvahu (včetně všech nepřípustných řešení, která nemůžeme vhodnými úvahami vyloučit), jako s jedinou „zbývající množinou“. Algoritmus začíná aplikací kroků 2, 3, 4 a 5 na tuto množinu.

2. **Dělící krok -** použijeme nějaké kritérium pro výběr jedné z dosud „neprověřených“ podmnožin (která není ani rozdělená ani vyloučena z našich úvah v předchozích krocích) a rozdělíme ji na dvě nebo více nových podmnožin.

3. **Oceňující krok -** pro každou novou množinu najdeme dolní hranici hodnoty účelové fce z_D pro přípustné řešení v této množině.

4. **Testovací krok -** každou novou podmnožinu vyloučíme z dalších úvah, jestliže

   (a) $z_D \geq z_H$,

   (b) neobsahuje žádné přípustné řešení,

   (c) nalezli jsme v ní nejlepší přípustné řešení (kterému odpovídá hodnota z_D). Pokud se to stane a $z_H > z_D$, položíme $z_H := z_D$ a znovu aplikujeme krok 3 na zbývající podmnožiny.

5. **Závěrečný krok -** výpočet končí, když už nezbývají žádné neprověřené podmnožiny. Aktuální hodnota z_H je optimální řešení. V opačném případě se vracíme ke kroku 1.

Poznámka

V případě, že se má účelová funkce maximalizovat, zůstává algoritmus nezměněn, až na nerovnosti v kroku 3 a výchozí hodnotu z_D, která je $-\infty$.

Příklad

Metodou větví a mezí řešte přiřazovací problém daný maticí

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Řešení

Iterace 0 Položíme $z_H = \infty$ a začínáme s množinou všech 24 přípustných řešení. Dolní hranici hodnot účelové funkce získáme tak, že v každém sloupci vybereme nejmenší prvek a tyto prvky sečteme. Obdržená hodnota je 7.

Iterace 1 Provedeme rozdělení množiny všech přípustných řešení do čtyř podmnožin v souladu s označením řádků matice písmeny A, B, C a D. Množina označená písmenem A, viz schéma řešení na následujícím obrázku, je množina řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) takových, že $x_1 = 9$. Množina označená písmenem B je množina řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) takových, že $x_1 = 4$. Analogicky pak písmeny C a D rozumíme množiny řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) takových, že $x_1 = 3$, resp. $x_1 = 2$.

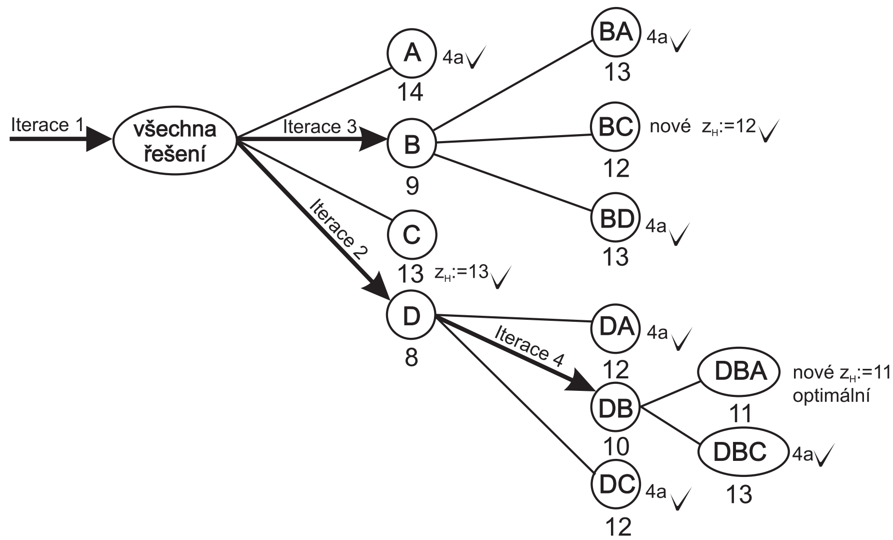
Dolní hranici hodnot účelové funkce na množinách řešení A, B, C a D určíme tak, že k danému x_1 přičteme nejmenší prvky ve zbývajících sloupcích, přičemž je zapovězen vždy ten řádek, ve kterém pevně dané x_1 leží. Odpovídající dolní hranice tedy jsou: $9 + (1 + 2 + 2) = 13$ pro množinu A, $4 + (1 + 2 + 2) = 9$ pro množinu B, $3 + (3 + 2 + 5) = 13$ pro množinu C a $2 + (1 + 3 + 2) = 8$ pro množinu D.

Hodnota $z_D = 13$ pro množinu C odpovídá přípustnému řešení, a jelikož $z_H > z_D$, přiřadíme $z_H := 13$ a množinu C vylučujeme z dalších úvah podle bodu 4c. Označme toto řešení jako $CBDA$. Nyní můžeme z dalších úvah vyloučit na základě bodu 4a také množinu A, protože v jejím případě je $z_D > z_H$. Množiny B a D nemůžeme v této fázi výpočtu z dalších úvah vyloučit. Aplikujeme na ně proto znovu dělící krok.

Iterace 2 Budeme dělit nejdříve množinu D, protože jí přísluší nižší hodnota z_D (8<9) než množině B. Rozdělíme ji na tři podmnožiny podle toho, z jakého řádku vybereme hodnotu proměnné x_2. Vzniknou tak podmnožiny DA, DB, DC, přičemž DA je množina řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) takových, že $x_1 = 2, x_2 = 5$. Analogicky pak DB a DC rozumíme množiny řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) takových, že $x_1 = 2, x_2 = 3$, resp. $x_1 = 2, x_2 = 1$. Odpovídající dolní hranice těchto množin jsou: $2+5+(3+2) = 12$ pro množinu DA, $2+3+(3+2) = 10$ pro množinu DB a $2 + 1 + (4 + 5) = 12$ pro množinu DC. Na základě těchto obdržených hodnot nemůžeme žádnou množinu vyloučit z dalších úvah a je nutné provést další dělící krok.

Iterace 3 Z dosud nevyloučených podmnožin přísluší nejmenší hodnota z_D množině B. Rozdělíme ji tedy do tří podmnožin obdobným způsobem jako množinu D. Hodnoty z_D odpovídající množinám BA, BC, BD po řadě jsou $13, 12$ a 13. První dvě z těchto hodnot odpovídají přípustným řešením. Můžeme proto množiny BA a BC vyloučit z dalších úvah a zároveň provedeme přiřazení $z_H := 12$. Tato hodnota odpovídá řešení $BCDA$. Nyní můžeme z dalších úvah vyloučit množiny DA a DC podle bodu 4a. Zbývá nám tedy množina DB, na kterou je nutné opět aplikovat dělící krok.

Iterace 4 Množinu DB rozdělíme do dvou podmnožin DBA a DBC, jejichž dolní hranice jsou 11, resp. 13. Obě odpovídají přípustným řešením, a kromě toho přípustnému řešení $DBAC$ pro podmnožinu DBA odpovídá lepší hodnota než je současná hodnota z_H. Provedeme proto přiřazení $z_H := 11$. Protože nezbývají žádné nevyloučené podmnožiny, algoritmus končí. Řešení $DBAC$ je tedy optimální.



Obrázek 12: Schéma řešení. Výsledkem příslušné iterace je vždy rozdělení dané množiny, ocenění vzniklých podmnožin a jejich případné vyloučení z dalších úvah

4.2 Metoda větví a mezí pro smíšené lineární programování

Je dána úloha

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

při omezeních

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i\,, \qquad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0, \;\; \text{pro } \; j = 1, \dots, n \\ x_j & \quad \text{jsou celočíselné pro } \; j = 1, \dots, N \;\; (N \leq n). \end{aligned}$$

Algoritmus metody větví a mezí se nemění, tj. opět dělíme úlohu na podúlohy atd. Je pouze potřeba stanovit, jak bude toto dělení konkrétně vypadat.

Začínáme tím, že ignorujeme celočíselná omezení a vyřešíme tedy úlohu pomocí simplexové metody, aniž bychom na ně brali nějaký ohled. Potom nalezneme první proměnnou, pro kterou x_j, $j \leq N$ není celočíselné. Tato proměnná leží v intervalu $\langle k, k+1 \rangle$, kde $k \in N$, je vhodné číslo, tj. $k < x_j < k + 1$.

Pak dělíme dosavadní množinu řešení na dvě podmnožiny, k nimž přidáme po jednom omezení, a to

1. $x_j \leq k$,

2. $x_j \geq k + 1$.

Čili každé řešení vzniklých podúloh musí kromě původních omezení splňovat jedno nové omezení. Poté podle třetího kroku určíme horní hranici hodnot účelové funkce pro každou z těchto podmnožin. Vybereme úlohu s nejvyšší horní hranicí, kterou budeme řešit nejdříve. Po přidání nových omezení není nutné řešit příslušné podúlohy znovu od začátku. Je možné využít toho, že simplexová tabulka je duálně přípustná a pokračovat v řešení pomocí duálně simplexové metody. Pokud po vyřešení některé z podúloh nedostaneme celočíselné řešení a nemůžeme ji vyloučit z dalších úvah, je nutné znovu nalézt první proměnnou, která měla být podle požadavků celočíselná, přidat příslušná omezení a postup opakovat.

Příklad
Řešte úlohu

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1, x_2 & \in & Z \end{array}$$

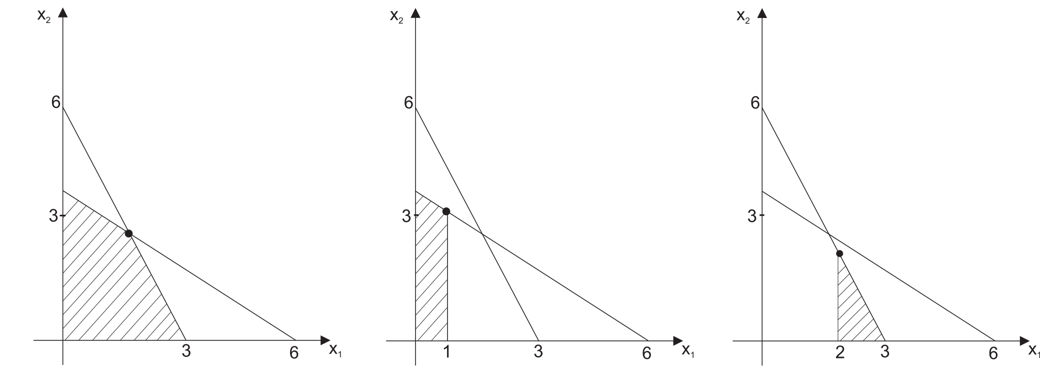
Řešení
Úlohu řešíme nejdříve bez ohledu na požadavky celočíselnosti kladené na proměnné x_1 a x_2. Tento postup nevyžaduje žádný komentář.

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	
z	-3	-2	0	0	0
x_1'	2	1	1	0	6
x_2'	3	5	0	1	18

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	
z	0	-1/2	3/2	0	9
x_1	1	1/2	1/2	0	3
x_2'	0	7/2	-3/2	1	9

	x_1	x_2	x_1'	x_2'	
	0	0	9/7	1/7	72/7
x_1	1	0	5/7	-1/7	12/7
x_2	0	1	-3/7	2/7	18/7

Proměnná x_1 nenabývá celočíselné hodnoty, což je v rozporu s požadavky. Vzhledem k tomu, že $x_1 \in < 1, 2 >$, přidáme k původní úloze nejdříve omezení $x_1 \leq 1$, a pak také omezení $x_2 \geq 2$. Horní hranice hodnot účelové funkce je v obou případech $72/7$. Před přidáním nových omezení k úloze je nutno do každého z nich



(a) Množina přípustných řešení úlohy nebereme-li v úvahu celočíselné omezení

(b) Množina přípustných řešení po přidání omezení $x_1 \leq 1$

(c) Množina přípustných řešení po přidání omezení $x_1 \geq 2$

Obrázek 13: Grafické znázornění postupu řešení

zavést doplňkovou proměnnou. Přidaná omezení je nutné upravit tak, abychom obdrželi výchozí bázické řešení. Toto řešení nebude přípustné, ale bude duálně přípustné, a výpočet bude pokračovat duální simplexovou metodou. Ve výpočtu, který následuje, odpovídají tabulky v levém sloupci úloze, do které bylo přidáno omezení $x_1 \leq 1$. Tabulky v pravém sloupci odpovídají úloze, do které bylo přidáno omezení $x_2 \geq 2$.

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	9/7	1/7	0	72/7
x_1	1	0	5/7	-1/7	0	12/7
x_2	0	1	-3/7	2/7	0	18/7
x'_3	0	0	-5/7	1/7	1	-5/7

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	0	2/7	9/5	9
x_1	1	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1/5	-3/5	3
x'_1	0	0	1	-1/5	-7/5	1

Řešení (1,3,1,0,0) a $z = 9$.

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	9/7	1/7	0	72/7
x_1	1	0	5/7	-1/7	0	12/7
x_2	0	1	-3/7	2/7	0	18/7
x'_3	0	0	5/7	-1/7	1	-2/7

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	2	0	1	10
x_1	1	0	0	0	-1	2
x_2	0	1	1	0	2	2
x'_3	0	0	-5	1	-7	2

Řešení (2,2,2,0,0) a $z = 10$.

Optimální řešení je tedy $x_1 = 2, x_2 = 2$ a hodnota účelové funkce je $z = 10$.

Příklady k procvičení

Metodou větví a mezí řešte příklady na přiřazovací problém ze cvičení k předchozí kapitole.

1. Řešte úlohu s ohledem na celočíselnost proměnných

$$\min z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Řešte úlohu s ohledem na celočíselnost proměnných

$$\max z = 33x_1 + 12x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Řešte úlohu s ohledem na celočíselnost proměnných

$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & \leq & 10 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ 6x_1 & - & 5x_2 & & & \leq & 0 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení

1. $x_1 = 2, x_2 = 0$
2. $x_1 = 2, x_2 = 3$
3. $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7$

5 PARAMETRICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
Doposud jsme předpokládali, že všechny koeficienty v úloze lineárního programování jsou konstantní. V následující kapitole od tohoto předpokladu ustoupíme a budeme zkoumat, jakým způsobem ovlivní změna koeficientů v účelové funkci a v pravých stranách omezení složení optimálního řešení. V obou případech se budeme zabývat změnou koeficientů v závislosti na jednom parametru.

Průvodce studiem
Předpoklad, že koeficienty (strukturní koeficienty, omezující koeficienty i ceny) vyskytující se v úloze lineárního programování, se nemění, není příliš reálný. Ve skutečnosti musíme v řadě případů brát v úvahu, že podmínky, na základě kterých byla úloha sestavena se mohou měnit. Příkladem takové změny může být např. posílení či oslabení kurzu koruny vůči ostatním světovým měnám, což by se mohlo promítnout do nákupních cen surovin potřebných k výrobě nebo do výše dosaženého zisku z prodeje výrobků na zahraničních trzích. V této souvislosti vyvstává otázka, zda a jakým způsobem se při těchto změnách mění optimální řešení. Je proto účelné zkoumat vliv možných změn na obdržené řešení. Při takové analýze předpokládáme, že koeficienty v úloze se mění v závislosti na parametru (může jich být i více), a proto se taková analýza označuje pojmem parametrické programování.

5.1 Změny v koeficientech účelové fce

V tomto případě je účelová funkce

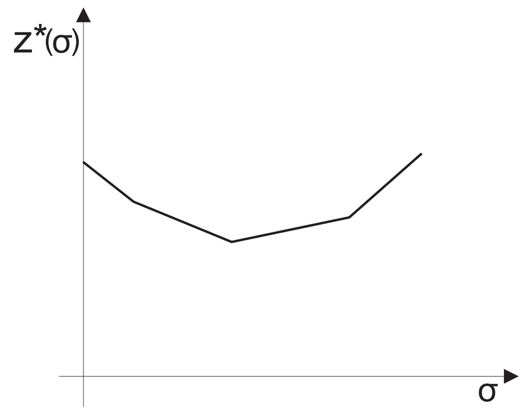
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

nahrazena funkcí

$$z(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + \alpha_j \sigma) x_j,$$

kde α_j jsou dané konstanty vyjadřující relativní rychlost změny koeficientů a σ představuje faktor, který tuto změnu způsobuje. Může být nekontrolovatelný (např. vývoj ekonomiky) nebo kontrolovatelný (přesun pracovních sil, popř. vybavení apod.).

Je zřejmé, že pro každou pevnou hodnotu parametru σje možné získat řešení pomocí simplexové metody. Tím, že se hodnota parametru σ mění, může (ale nemusí) dojít ke změně řešení a ke změně hodnoty účelové funkce. Proto je účelné



Obrázek 14: Závislost optimálních hodnot účelové funkce na parametru σ zavedeném do koeficientů účelové funkce.

vědět, jakým způsobem ovlivňuje parametr σ řešení, tj. nalézt řešení jako funkci parametru σ. Lze ukázat, že funkce $z^*(\sigma)$znázorňující optimální hodnoty účelové funkce z v závislosti na parametru σ je po částech lineární a konvexní. Tvar řešení se mění (pokud jde o složení báze) tehdy, když se mění sklon funkce $z^*(\sigma)$. Abychom ilustrovali postup řešení, uvažujme úlohu o plánování výroby z úvodní kapitoly se zavedeným parametrem σ do koeficientů účelové funkce.

Příklad

V závislosti na parametru σ řešte úlohu:

$$\max z = (300 + 200\sigma)x_1 + (500 - 100\sigma)x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Řešení

Začneme s konečnou simplexovou tabulkou, která odpovídá řešení pro $\sigma = 0$

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	0	150	100	3600
x'_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

První řádek této tabulky odpovídá rovnici

$$z + 150x'_2 + 100x'_3 = 3600$$

a přidáme-li do této rovnice členy s parametrem σ, dostaneme rovnici

$$z - 200\sigma x_1 + 100\sigma x_2 + \frac{3}{2}x'_2 + x'_3 = 3600\,.$$

Po eliminaci nenulových členů z rovnice odpovídající účelové funkci dostaneme

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	0	$150 - \frac{700}{6}\sigma$	$100 + \frac{200}{3}\sigma$	3600-200σ
x'_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
x_2	0	1	0	1/2	0	6
x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2

Testujeme-li, zda jsme už dosáhli optimálního řešení, vidíme, že optimální řešení obdržíme pro hodnoty parametru σ, které vyhovují nerovnostem

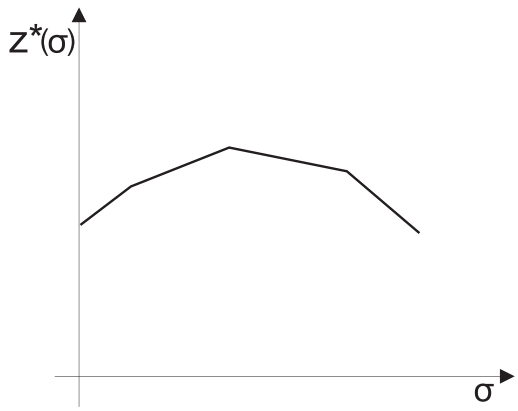
$$150 - \frac{700}{6}\sigma \geq 0 \quad \wedge \quad 100 + \frac{200}{3}\sigma \geq 0.$$

Hodnoty optimálního řešení jsou $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (2, 6, 2, 0, 0)$. V případě, že alespoň jedna z těchto nerovností neplatí, výpočet pokračuje. Tato situace nastane v případě, že $\sigma > \frac{9}{7}$. Pokračujeme tedy další iterací, po níž obdržíme

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	0	$-450 + 350\sigma$	0	$250 - 50\sigma$	$2700 + 500\sigma$
x'_2	0	0	3	1	-1	6
x_2	0	1	-3/2	0	1/2	3
x_1	1	0	1	0	0	4

Po provedení testu optimality vidíme, že pro σ, které splňuje vztah $\frac{9}{7} < \sigma \leq 5$, máme řešení $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (4, 3, 0, 6, 0)$. Pro $\sigma > 5$ výpočet pokračuje

	x_1	x_2	x'_1	x'_2	x'_3	
z	0	$-500 + 100\sigma$	$300 + 200\sigma$	0	0	$1200 + 800\sigma$
x'_2	0	2	0	1	0	12
x'_3	0	2	-3	0	1	6
x_1	1	0	1	0	0	4



Obrázek 15: Závislost optimálních hodnot účelové funkce na paramtru σ zavedeném do pravých stran soustavy omezení.

Výpočet končí. Pro $\sigma > 5$ je optimální řešení $(x_1, x_2, x'_1, x'_2, x'_3) = (4, 0, 0, 6, 12)$.

5.2 Změny v koeficientech pravé strany soustavy omezení

V tomto případě řešíme úlohu, ve které pracujeme s pravými stranami ve tvaru $b_i + \alpha_i\sigma$, tj. úlohu nalézt

$$\max z(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq b_i + \alpha_i\sigma \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

α_i, σ jsou veličiny, které mají podobný význam jako v předcházející části.

Lze dokázat, že při této modifikaci je funkce $z^*(\sigma)$, udávající optimální hodnoty účelové funkce v závislosti na σ, po částech lineární a konkávní.

Způsob řešení je velmi podobný předchozímu, protože změna v parametrech pravých stran b_i odpovídá změně v parametrech účelové funkce c_j u duální úlohy. Tzn. že rozdíl bude pouze v tom, že využijeme duálně simplexovou metodu. Pro ilustraci výpočetního postupu, který demonstruje jeho vztah k dualitě, budeme řešit duální úlohu k úloze předchozí se stejnou modifikací.

Příklad
V závislosti na parametru σ řešte úlohu:

$$\max z = -4y_1 - 12y_3 - 18y_3$$

$$\begin{array}{rcccl} y_1 & & + & y_3 & \geq & 300 + 200\sigma \\ & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 500 - 100\sigma \\ & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Řešení

Stejně jako v předchozím případě začínáme konečnou simplexovou tabulkou, která odpovídá případu $\sigma = 0$.

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
	2	0	0	2	6	$-3600 + 200\sigma$
y_3	1/3	0	1	-1/3	0	$100 + \frac{200}{3}\sigma$
y_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	$150 - \frac{700}{6}\sigma$

Je-li $150 - \frac{700}{6}\sigma \geq 0$, výpočet končí, což platí pro $\sigma \leq \frac{9}{7}$. V opačném případě výpočet pokračuje

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
	0	6	0	4	3	$-2700 - 500\sigma$
y_3	0	1	1	0	-1/2	$250 - 50\sigma$
y_1	1	-3	0	-1	3/2	$-450 + 350\sigma$

Je-li $250 - 50\sigma \geq 0$, výpočet končí, to platí pro $\sigma \leq 5$.

	y_1	y_2	y_3	y_1'	y_2'	
	0	12	6	4	0	$-1200 - 800\sigma$
y_2'	0	-2	-2	0	1	$-500 + 100\sigma$
y_1	1	0	3	-1	0	$300 + 200\sigma$

Nalezli jsme optimální řešení pro hodnoty $\sigma > 5$, čímž výpočet končí.

Poznámka
Kromě změny v koeficientech účelové funkce či pravých stranách, lze uvažovat také změny v koeficientech matice soustavy omezení a případy, kdy se parametr

vyskytuje ve všech uvedených koeficientech nebo v některé kombinaci těchto případů. Dále je možné sledovat změny koeficientů v závislosti na více parametrech. Zájemce o podrobnější seznámení s touto problematikou odkazujme na příslušnou literaturu.

6 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
Některé ekonomické rozhodovací problémy jsou takové povahy, že musíme rozhodovat postupně v různých etapách, přičemž v každé etapě se nacházíme před „strukturálně stejnou“ situací. Pro řešení úloh, k nimž rozhodovací problémy tohoto typu vedou, je často vhodný matematický aparát, který se nazývá dynamické programování. Tato kapitola je ovšem spíše ilustrativní a jejím cílem je ukázat možnosti a využitelnost dynamického programování, protože se jedná o disciplínu s velmi širokým polem uplatnění, které nejsme schopni při omezeném prostoru pro výklad postihnout.

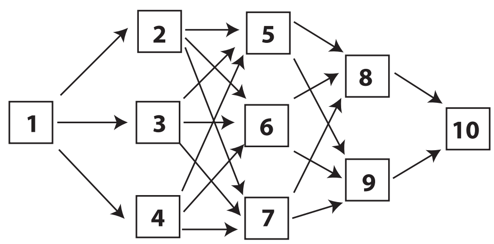
Průvodce studiem
Na rozdíl od lineárního programování, kde lze formulovat tvar úlohy a zvolit vhodný algoritmus k jejímu řešení, nemáme v případě dynamického programování obdobné nástroje k dispozici. Dynamické programování není v současné době souborem exaktních algoritmů. Je to spíš způsob přístupu k řešení, který umožňuje odvodit algoritmy pro jednotlivé úlohy, přičemž je nutné vzít v úvahu specifické rysy řešené úlohy. V zásadě je možné říci, že vytváříme algoritmus pro každou úlohu zvlášť.

Dynamické programování je možné využít k řešení úloh velmi různorodého charakteru, které nemusí nutně být lineární. S pomocí dynamického programování lze řešit např. úkoly spadající mezi konvexní případy matematického programování a řadu dalších nelineárních úloh.

Tuto obecnost však nelze zaměňovat s univerzálností, protože pro řadu úloh by se ukázalo dynamické programování jako nevhodné nebo neefektivní. Často je nejtěžším úkolem rozpoznat, zda je vůbec vhodné řešit daný problém pomocí dynamického programování. Základní rysy úloh, které je možné řešit s využitím dynamického programování, ilustruje následující příklad.

Problém dostavníku
Jedná se o mýtického obchodního cestujícího, který cestoval dostavníkem nepřátelským indiánským územím před 125 lety. Výchozí a konečné místo jeho cesty bylo známé, ale měl na výběr, přes které státy nebo teritoria bude projíždět. Možnosti, které měl, jsou shrnuty v následujícím schématu:

Cestujícímu záleží především na jeho bezpečnosti. Cena za obranu dostavníku při cestě z i-tého do j-tého místa je dána následujícími tabulkami.



Obrázek 16: Schéma možných cest obchodního cestujícího.

	2	3	4
1	2	4	3

	5	6	7
2	7	4	6
3	3	2	4
4	4	1	5

	8	9
5	1	4
6	6	3
7	3	3

	10
8	3
9	4

Protože předpokládá, že nejlevnější cesta bude také nejbezpečnější, rád by znal nejlevnější způsob cestování z hlediska nákladů na obranu.

Řešení

Nejprve si povšimněme, že jednotlivé nejlevnější cesty nedávají jako celek nejlevnější možnost. Tyto úvahy by nás zavedly k cestovnímu plánu

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10.$$

Ale cesta $1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$ je levnější, než cesta $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 6$, což ukazuje, že tento způsob uvažování není pro řešení problému vhodný.

Protože tento problém není příliš rozsáhlý, bylo by možné prověřit všech 18 možností a najít tu nejlepší. Tento postup by se ale ukázal neefektivní u úloh většího rozsahu. Pomocí dynamického programování je možné vyřešit tuto úlohu s menším výpočetním úsilím, i když početní úspory by se výrazněji projevily až u větší verze tohoto problému. Zavedeme následující označení:

- proměnné x_n, $n = 1, 2, 3, 4$ budou představovat rozhodovací proměnné, které vyjadřují bezprostřední cíle v n-tém stadiu cesty. Potom lze vybranou cestu vyjádřit ve tvaru

  $$1 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4,$$

  přičemž víme, že $x_4 = 10$,

- funkce $f_n(s, x_n)$ vyjadřuje celkové náklady na ochranu po neprojetých cestách, nachází-li se cestující ve stavu s n-tého stadia, a zvolil možnost x_n,

- pro dané s a n nechť x_n^* značí hodnotu x_n, která minimalizuje $f_n(s, x_n)$,

- nechť $f_n^*(s)$ je odpovídající minimální hodnota, tj. $f_n^*(s) = f_n(s, x_n^*)$.

Úkolem je nalézt $f_1^*(1)$ a odpovídající cestu. Abychom dospěli k tomuto výsledku, budeme nejdříve postupně nacházet hodnoty $f_4^*(s), f_3^*(s), f_2^*(s), f_1^*(s)$, což obnáší řešit postupně čím dál větší část celého problému a dospět tak k celkovému řešení. Nejdříve uvažujeme, že cestujícímu zbývá projet už jen poslední úsek cesty. V tomto případě dostáváme okamžitě výsledek v závislosti na tom, zda se cestující nachází na stanovišti 8 či 9.

s	$f_4^*(s)$	x_4^*
8	3	10
9	4	10

Pokud má cestující před sebou ještě dva úseky cesty, musí se rozhodnout, zda např. ze stanoviště 5 pojede do stanoviště 8 nebo 9, a vzít v úvahu náklady na obranu z těchto stanovišť až do cíle cesty. Volí tedy mezi dvěma možnostmi, které můžeme pomocí zavedeného označení vyjádřit takto: $f_3(5, 8) = 1 + 3 = 4$ a $f_3(5, 9) = 4 + 4 = 8$. Levnější způsob je cestovat ze stanoviště 5 přes stanoviště 8, takže dostáváme $x_3^* = 8$ a $f_3^*(5) = 4$. Obdobným způsobem nalezneme optimální možnosti pro případy, kdy cestující vyjíždí ze stanoviště 6 a 7.

	8	9	$f_3^*(s)$	x_3^*
5	4	8	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

Situace, kdy má cestující před sebou ještě tři úseky cesty, se analyzuje zcela analogicky jako v předchozím případě. Výsledná tabulka udává optimální hodnoty nákladů na obranu dostavníku ze stanoviště 2,3, resp. 4, až do cíle.

	5	6	7	$f_2^*(s)$	x_2^*
2	11	11	12	11	5,6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5,6

Nyní zbývá výše uvedené úvahy rozšířit i na stanoviště 1, ze kterého dostavník vyjíždí. Optimální náklady na obranu v závislosti na volbě další cesty jsou opět shrnuty v tabulce.

	2	3	4	$f_1^*(s)$	x_1^*
1	13	11	11	11	3,4

Na základě provedených výpočtů můžeme identifikovat optimální řešení. Z poslední tabulky vyplývá, že minimální náklady na obranu jsou 11. Toho může být dosaženo, pokud se cestující rozhodne jet ze stanoviště 1 do stanoviště 3 nebo 4. Nechť cestující volí např. $x_1^* = 3$. Předposlední tabulka říká, že nejlevnější cesta ze stanoviště 3 vede přes stanoviště 5, takže $x_2^* = 5$. Odtud pak na základě první a druhé tabulky cesta pokračuje přes stanoviště 8 do cíle cesty, tj. $x_3^* = 8$. Celkem tedy dostáváme jednu z optimálních možností $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10$. Nalezení zbývajících dvou ponecháváme jako úkol čtenáři.

6.1 Charakteristika problémů dynamického programování

Problém dostavníku, který jsme použili jako prototyp příkladů řešitelných pomocí dynamického programování, v sobě ukrývá obecnější strukturu společnou s celou řadou na první pohled naprosto odlišných problémů. Rozpoznání této struktury nám může být vodítkem k určení toho, zda je vhodné daný problém řešit pomocí dynamického programování či nikoli.

Společné rysy úloh dynamického programování

1. Proces lze rozdělit na stadia, přičemž v každém stadiu se má udělat rozhodnutí.
2. Každé stadium souvisí s následujícími a v každém z nich může systém nabývat daného počtu stavů.
3. V daném stadiu nezávisí optimální rozhodnutí na rozhodnutích předešlých.
4. Začínáme hledat řešení od konce.
5. Existuje rekurzivní vztah. Přesný tvar tohoto rekurzivního vztahu nemusí být vždy stejný a závisí na charakteru problému.

V dalším textu budeme používat následující značení, které jsme zavedli při řešení problému dostavníku:

- x_n - rozhodovací proměnná (stavová) pro n-té stadium, kde $n = 1, \ldots, N$ je počet stadií.
- $f_n(s, x_n)$ - hodnota účelové funkce daná tím, že systém se nachází ve výchozím stavu s stadia n při pevně zvoleném x_n.

- $f_n^*(s)$ - maximální(minimální) hodnota funkce $f_n(s, x_n)$ brána přes všechna x_n, tj.
$$f_n^*(s) = max/min f_n(s, x_n),$$
kde $f_n(s, x_n)$ je vyjádřeno ve vztahu k s, x_n, f_{n+1}^*.

6.2 Deterministické dynamické programování

Deterministické problémy lze charakterizovat takto - stav v příštím stadiu je zcela určen stavem a rozhodnutím v současném stadiu.

V n-tém stadiu se proces nachází ve stavu s_n. Učiníme rozhodnutí x_n, což způsobí přechod do stavu s_{n+1}, v (n+1)-ním stadiu. Od této fáze vpřed byla už optimální strategie určena a je dána optimální hodnota účelové funkce $f_{n+1}^*(s_{n+1})$. Rozhodnutí x_n způsobí předem známý přírůstek hodnoty účelové funkce. Kombinace těchto dvou veličin vhodným způsobem poskytne hodnotu účelové funkce $f_n(s, x_n)$ od n-tého stadia dále při učiněném rozhodnutí x_n. Optimalizací vzhledem k x_n dostaneme hodnotu $f_n^*(s) = \max / \min f(s, x_n) = f_n^*(s, x_n^*)$. Po provedení těchto výpočtů pro každou hodnotu s_n můžeme v procesu řešení přejít zpět k předchozímu stadiu.

Příklad

WHC (World Health Council) se zabývá zdokonalením zdravotnické péče v rozvojových zemí světa. Má k dispozici 5 lékařských týmů, které je třeba přidělit třem zemím. Kritérium je efektivita využití těchto pěti týmů, která se měří v dodatečných letech lidského života (očekávaný nárůst průměrné délky lidského života $\times$ počet obyvatel). Následující tabulka udává odhadovaný nárůst dodatečných let (v tisících) pro jednotlivé země.

		země		
		1	2	3
počet týmů	0	0	0	0
	1	45	20	50
	2	70	45	70
	3	90	75	80
	4	105	110	100
	5	120	150	130

Řešení

Ačkoli zde není žádná daná posloupnost, můžeme z hlediska dynamického programování tyto tři země považovat za tři stadia . Rozhodovací proměnná x_n bude udávat počet týmů přiřazených do n-té země. Stav systému bude chápán jako počet lékařských týmů, které jsou ještě k dispozici pro přiřazení.

Nechť $p_i(x_i)$ značí míru efektivity při přiřazení x_i lékařských týmů do i-té země. Potom je naším cílem zvolit x_1, x_2, x_3 tak, abychom nalezli maximální hodnotu účelové funkce

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

při omezení

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 5,$$

kde x_i jsou nezáporná celá čísla.
Při označení zavedeném v předchozím odstavci pro $n = 1, 2, 3$ dostáváme

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^{3} p_i(x_i),$$

kde

$$\sum_{i=n}^{3} x_i = s.$$

Dále pak máme

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,\ldots,s} f_n(s_n, x_n).$$

Odtud dostáváme

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

a

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,\ldots,s} \{p(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)\},$$

přičemž klademe $f_4^* = 0$. Nyní už můžeme začít s vlastním výpočtem, jehož výsledky pro jednotlivá stadia udávají následující tabulky. Začínáme posledním stadiem ($n = 3$) a pokračujeme až k prvnímu stadiu ($n = 1$).

$n = 3$

s_3	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

$n = 2$

	$f_2(s, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s - x_2)$							
s_2	0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0,1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

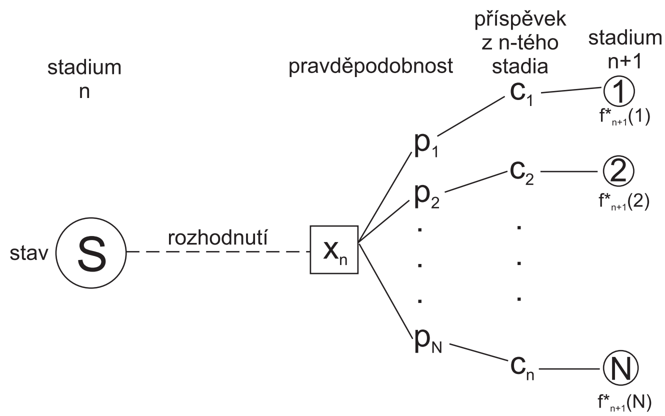
$n = 1$

	$f_1(s, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s - x_1)$							
s_1	0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s)$	x_1^*
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Zbývá identifikovat optimální řešení. Máme $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$, $x_3^* = 1$. Hodnota účelové funkce při tomto přidělení týmů činí $f_1^*(s) = 170$.

6.3 Pravděpodobnostní dynamické programování

Pravděpodobnostní dynamické programování se od deterministického dynamického programování liší tím, že stav procesu v dalším stadiu není zcela určen stavem v současném stadiu a rozhodnutím. Existuje pouze určitá pravděpodobnost, že se proces po rozhodnutí dostane do daného stavu. Toto rozdělení pravděpodobnosti je ovšem zcela určeno stadiem a rozhodnutím. Vliv vstupních faktorů na výsledek rozhodnutí je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 17: Struktura rozhodování - pravděpodobnostní dynamické programování

Rekurzivní vztah pro výpočet hodnot $f_n(s_n, x_n)$ pomocí $f^*_{n+1}(s_{n+1})$ bude o něco komplikovanější (díky pravděpodobnosti) a jeho přesný tvar závisí na povaze úlohy. Pro ilustraci napíšeme jakýsi „obecný“ tvar rekurzivního vztahu v případě, že úkolem je minimalizovat očekávaný součet příspěvků z jednotlivých stadií. V tomto případě by $f_n(s, x_n)$ reprezentovalo minimum očekávaných součtů od n-tého stadia vpřed, při daném rozhodnutí x_n a stavu s v n-tém stadiu,tj.

$$f_n(s, x_n) = \sum_{i=1}^{N} p_i(c_i + f^*_{n+1}(i)),$$

kde

$$f^*_{n+1}(s_{n+1}) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(s, x_{n+1}),$$

přičemž při minimalizaci jsou uvažovány přípustné hodnoty x_{n+1}. Problematiku pravděpodobnostního dynamického programování budeme blíže ilustrovat následující úlohou.

Příklad

Společnost získala zakázku na výrobu speciálního výrobku. Ale zákazník stanovil natolik přísné požadavky, že bude nutné vyrobit více kusů, aby alespoň jeden těmto požadavkům vyhověl. Podle odhadů výrobce bude požadavkům vyhovovat každý druhý výrobek. To znamená, že pravděpodobnost výroby vyhovujícího výrobku je $\frac{1}{2}$ a zmetku je $\frac{1}{2}$. V množství n výrobků nebude tedy ani jeden vyhovující s pravděpodobností $(\frac{1}{2})^n$.

Náklady na kalibraci výrobního procesu jsou 30 000 Kč a náklady na výrobu jednoho výrobku jsou 10 000 Kč. Pokud mezi výrobky z jedné série nebude žádný vyhovující, je nutné znovu provést kalibraci výrobního procesu. Na základě termínu dodání výrobce ví, že tento postup stihne zopakovat nejvýše třikrát. Pokud ani po třetím nastavení nebude žádný výrobek vyhovovat, výrobce nesplní zakázku a bude muset zaplatit penalizaci 160 000 Kč.

Úkolem je stanovit výrobní strategii s ohledem na počet výrobků při jednotlivých kalibracích, která minimalizuje výrobní náklady.

Řešení

Stadia, do kterých realizaci zakázky rozdělíme, budou představována výrobními procesy následujícími po kalibracích. Rozhodovací proměnné x_n budou udávat počet výrobků vyrobených v rámci těchto procesů. Stav systému budeme chápat jako počet vyhovujících výrobků, který je ještě potřeba vyrobit. Čili $s = 1$ nebo $s = 0$. V průběhu výpočtu vezmeme jako početní jednotku 10 000 Kč. Začneme-li se problémem zabývat od konce, můžeme definovat, že $f_4^*(1) = 16$. Tuto hodnotu můžeme chápat jednoduše tak, že když podnik rezignuje na splnění zakázky, zaplatí stanovenou penalizaci. Označíme-li symbolem K kalibrační náklady, pak hodnota $f_3(1, x_n)$ udávající minimální celkové náklady pro třetí stadium závisí na kalibračních nákladech, výrobních nákladech (závisí na počtu vyrobených výrobků) a pravděpodobnosti, s jakou podnik zaplatí penalizaci. Hodnotu $f_3(1, x_n)$ můžeme tedy vyjádřit vtahem

$$f_3(1, x_3) = K + x_3 + f_4^*(1)(\frac{1}{2})^{x_3}.$$

Minimalizací hodnoty $f_3(1, x_n)$ přes všechna x_n bychom dostali hodnotu $f_3^*(1)$, pomocí níž bychom získali v podstatě stejný vztah pro vyjádření minimálních nákladů od druhého stadia vpřed. Můžeme tedy formulovat obecný vztah pro minimální celkové náklady $f_n(1, x_n)$ od n-tého stadia vpřed při stavu s a rozhodnutí x_n ve tvaru

$$f_n(1, x_n) = K + x_n + f_{n+1}^*(1)(\frac{1}{2})^{x_n}.$$

V důsledku toho je obecný rekurzivní vtah pro výpočet hodnot $f_n^*(1)$ dán vztahem

$$f_n^*(1) = \min_{x_n = 0,1,\dots} (K + x_n + f_{n+1}^*(1)(\frac{1}{2})^{x_n}).$$

Výpočty těchto hodnot jsou shrnuty v následujících tabulkách:

	$f_3(1,x_3){=}k{+}x_2{+}f_4^*(1)(1/2)^{x_3}$							
sx_3	0	1	2	3	4	5	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0						0	0
1	16	12	9	8	8	1/2	8	3 nebo 4

$f_2(1,x_2)=k+x_2+f_3^*(1)(1/2)^{x_2}$

sx_2	0	1	2	3	4	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0					0	0
1	8	8	7	7	7 1/2	7	2 nebo 3

$f_1(1,x_1)=k+x_1+f_2^*(1)(1/2)^{x_1}$

sx_1	0	1	2	3	4	$f_1^*(s)$	x_1^*
1	7	7 1/2	6 3/4	6 7/8	7 7/16	6 3/4	2

Optimální strategie je vyrobit 2 výrobky v prvním výrobním procesu, v případě neúspěchu 2 nebo 3 ve druhém, v případě dalšího neúspěchu 3 nebo 4 ve třetím. Očekávané náklady na výrobu jsou 67 750.

Příklady

1. Banka chce v daném regionu zlepšit služby nabízené klientům. Uvažuje proto o rozmístění sedmi bankomatů do čtyř měst. Kritériem pro umístění bankomatů je počet klientů, jejichž přístup k nabízeným službám se po rozmístění zlepší. Následující tabulka udává v tisících očekávané počty zákazníků, kteří budou nové bankomaty využívat.

Počet bankomatů	Očekávaný počet zákazníků 1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	8	10	9	11
2	16	15	14	18
3	23	21	20	25
4	29	30	24	33
5	34	34	28	37
6	40	37	31	44
7	45	40	34	49

Využijte dynamického programování k nalezení optimálního způsobu rozmístění bankomatů.

2. Student oboru Matematické metody v ekonomice se připravuje na státní zkoušku. Na přípravu mu zbývá poslední týden, který by rád využil co nejefektivněji. Cítí, že každému předmětu by měl věnovat ještě alespoň jeden

den a rád by se soustředil každý den pouze na jeden předmět. Může tudíž vyčlenit pro studium každého předmětu 1 až 5 dní. Při sestavování studijního plánu si vzpomněl na dynamické programování a těchto svých znalostí by rád využil. Kritérium efektivity studia je počet zvládnutých státnicových otázek do jednotlivých předmětů, které udává následující tabulka:

Počet studijních dnů	Odhadovaný počet zvládnutých otázek		
1	5	6	7
2	9	10	10
3	12	13	13
4	14	15	13
5	15	17	13

3. Řešte úlohu o výrobě speciálního výrobku, jestliže došlo k následující změně v zadání: Po pečlivé analýze zdokonalení výrobního procesu se nyní odhaduje, že požadavkům zákazníka bude výrobek vyhovovat s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Úlohu řešte za předpokladu, že výrobce má k dispozici

   (a) dva kalibrační procesy,

   (b) tři kalibrační procesy.

   Využijte dynamického programování k řešení úlohy.

4. Mladý a nadšený absolvent předmětu Aplikovaná statistika věří, že nalezl systém, jak vyhrát v jedné z populárních her provozovaných v kasinech v Las Vegas. V každém kole hry je možné vsadit nějaké množství žetonů, které hráč buď prohraje anebo vyhraje stejný počet. Mladý a nadšený statistik se domnívá, že jeho systém mu umožňuje vyhrát tuto hru s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Jeho kamarádi mu nevěří, a tak s ním uzavřeli sázku, že nebude mít po třech kolech pět žetonů, jestliže začínal se třemi.
   Předpokládejme, že mladý nadšenec má pravdu a stanovte pro něj optimální strategii, tj. kolik v každém ze tří kol vsadil žetonů, která by maximalizovala šanci vyhrát sázku uzavřenou s kamarády. Využijte dynamického programování.

7 TEORIE HER

... co by Vám měla přinést tato kapitola:
Doposud jsme se zabývali tím, jak využít omezené množství zdrojů, aby výsledek byl podle předem stanoveného kritéria optimální. Předpokládali jsme, že subjekt, který se rozhoduje, může jednat, aniž by narazil na protiakce jiných subjektů, které mohou mít protichůdné zájmy. Studiem konkurenčních a konfliktních situací se zabývá matematická disciplína s názvem teorie her a v této kapitole se seznámíme s jejími základy. Budeme se věnovat pouze hrám dvou hráčů a naším cílem bude poukázat na souvislost těchto her s úlohou lineárního programování.

Čas potřebný ke studiu
Doporučený čas k prostudování kapitoly je 6 hodin.

Průvodce studiem
Teorie her je matematická teorie zabývající se obecnými zákonitostmi konkurenčních vztahů ve formální podobě. Problémy, které se v teorii her zkoumají, mají velmi různorodý charakter. Jedním ze znaků, podle nichž se hry rozlišují, je počet stran s protichůdnými zájmy, které se hry účastní. Nejvíce jsou prozkoumány hry dvou hráčů, tj. takové hry, do kterých jsou zapojeny pouze dvě strany s protichůdnými zájmy. Může jít o osoby, skupiny osob, armády, organizace, státy apod. Důležité je, aby při hře vystupovaly jako jedna strana hájící určité zájmy.

Výsledkem rozboru konfliktních situací nebývá zpravidla doporučení jediného optimálního způsobu jednání, protože takové jednání může být zmařeno jednáním protistrany. Spíše jde o to vypracovat nějakou strategii "rozumného chování", která by umožňovala postupovat způsobem, který při jakémkoli jednání protistrany zaručuje určitý dosažitelný výsledek.

7.1 Základní pojmy a předpoklady

Pro ilustraci charakteru problémů řešených v teorii her uvažujme u nás dobře známou hru kámen-nůžky-papír. V této hře hráči symbolicky ukazují jeden z těchto předmětů. Pokud ukážou oba stejný symbol výsledek je nerozhodný, dále pak kámen vítězí nad nůžkami, nůžky nad papírem a papír nad kamenem. Každý z hráčů má tedy na výběr ze tří možností. Označíme-li protistrany jako hráče I a hráče II, a jako výhru či prohru stanovíme 1 Kč, můžeme výhry a prohry znázornit tabulkou:

			II	
		K	N	P
	K	0	1	-1
I	N	-1	0	1
	P	1	-1	-0

Hra je tedy charakterizována strategiemi hráče I, strategiemi hráče II a výplatní tabulkou, popř. maticí. Pro další úvahy je nutné vymezit následující pojmy

- Strategie -předem určený plán, který úplně stanovuje, jak reagovat v libovolném stadiu hry. Před začátkem hry každý hráč zná strategie, které může použít on sám, strategie které může použít soupeř a výplatní matici.
- Průběh hry- hráči volí strategie bez znalosti strategie protivníka. Výplatní tabulka se píše pro prvního hráče, protože u hry s nulovým součtem je zároveň určena také pro druhého hráče.
- Předpoklady-oba hráči jsou rovnocenní a každý sleduje nekompromisně svůj cíl a při rozhodnutích se řídí rozumovou úvahou (protikladem jsou tzv. hry proti přírodě, která volí strategie náhodně, bez ohledu na vlastní prospěch).

Cílem teorie her je odvodit racionální kritéria pro výběr strategií. V některých případech umožňuje struktura výplatní matice nalézt řešení hry stanovením tzv. dominantní strategie. Strategie se nazývá dominantní vzhledem k jiné strategii, jestliže vždy dává stejně dobrý nebo lepší výsledek bez ohledu na reakci protivníka.

Ilustrační příklad
Dva politici soupeří o místo v senátu. Snaží se naplánovat kampaň na poslední dva dny před volbami. Oba politici chtějí strávit tyto dva dny ve dvou klíčových městech Rigtown a Megapolis. Cestovat chtějí v noci v rámci úspory času. Každý z nich stojí před volbou, zda strávit oba dny v jednom městě nebo jeden den v každém z měst. Ani jeden z politiků neví, co bude dělat soupeř a rozhodnutí musí být učiněno předem. Politici se ptají svých volebních manažerů na možný dopad jejich rozhodnutí z hlediska získaných nebo ztracených hlasů.
Formulace: Každý z hráčů (politiků) má na výběr ze tří strategií:

1. Strategie - strávit jeden den v každém z měst
2. Strategie - strávit oba dny v Rigtownu
3. Strategie - strávit oba dny v Megapolisu

Cílem je získat co nejvíce volebních hlasů od protivníka. Výplatní matice pro politika I má následující tvar:

			II	
		1	2	3
	1	-3	-2	6
I	2	2	0	2
	3	5	-2	-4

Řešení
Tabulka nezahrnuje žádnou dominantní strategii pro hráče II. Avšak pro hráče I je strategie 1 dominantní nad strategií 3. To znamená., že strategii 3 můžeme vyloučit z dalších úvah (v případě hráče I).

	1	2	3
1	1	2	4
2	1	0	5

Při této redukci vidíme, že strategie 1, 2 pro hráče II jsou dominantní nad strategií 3, kterou tedy také nemusíme brát v úvahu. Dochází tedy k dalšímu zúžení výplatní matice.

	1	2
1	1	2
2	1	0

Dále vidíme, že strategie 1 pro I je dominantní nad 2

	1	2
1	1	2

A konečně strategie 1 pro II je dominantní nad 2. Výsledkem hry je volba strategie 1 oběma hráči. Při této volbě získá hráč I tisíc volebních hlasů od hráče II

Uvažujme nyní modifikaci senátní kampaně ve tvaru:

			II	
		1	2	3
	1	-3	-2	6
I	2	2	0	2
	3	5	-2	-4

V tomto případě neumožňuje struktura výplatní matice nalézt dominantní strategii. Zvažme některé možnosti, které se hráčům nabízejí. Vybere-li hráč I strategii 1, může sice vyhrát 6, ale také ztratit 3. Vybere-li hráč I strategii 3, může sice vyhrát 5, ale také ztratit 4. Předpokládáme-li, že hráč I hraje tak, aby minimalizoval své ztráty, pak zřejmě nezvolí ani strategii 1 ani 3, které mu mohou způsobit velké ztráty, a zvolí zřejmě 2. Na druhou stranu hráč II bude zřejmě také hrát 2, protože mu zaručuje, že neprohraje, ale může získat.

Obecně lze na základě výše provedených úvah hráčů odvodit následující pravidla pro volbu strategií:
Hraje-li hráč I i-tou strategii, musí počítat s tím, že má zaručenu jenom minimální výhru dosažitelnou touto strategií, neboť má rozumně uvažujícího protivníka. Zvolí-li si i-tou strategii výhra činí $\min_j a_{ij}$. Nechce-li zbytečně riskovat, volí strategii, při které je toto minimum největší. Přitom má zaručenu výhru

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

a příslušnou strategii nazýváme maximinovou. Je to minimální výhra, kterou si může hráč I zaručit. Nazýváme ji dolní cenou hry a značíme $\underline{v}$.
Hráč II uvažuje podobně. Chce rovněž vyhrát co nejvíce, nebo, což je totéž, zredukovat výhru hráče I na minimum. Vybere-li j-tou strategii, má zaručeno, že hráč I nevyhraje víc než $\max_i a_{ij}$ a bude volit takovou strategii, kde je toto maximum nejmenší. Přitom má zaručeno, že neprohraje víc, než

$$\min_j \max_i a_{ij}$$

a příslušnou strategii nazýváme minimaxovou. Je to maximální výhra hráče I, jejímuž překročení může hráč II zabránit. Nazývá se horní cenou hry a značí se symbolem $\overline{v}$.
Jestliže platí: $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v$, nazýváme v cenou hry.

Věta 1
Je-li $A = (a_{ij})$ libovolná matice, pak platí $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$.

Důkaz:
Pro dané i platí:

$$\min_j a_{ij} \leq a_{ij} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} \leq \max_i a_{ij}.$$

Je-li každé maximum na pravé straně poslední nerovnosti větší než výraz na levé (který nezávisí na j), pak také nejmenší z těchto maxim je větší nebo rovno tomuto výrazu. Tvrzení je dokázáno.

Jestliže maximin je roven minimaxu a optimální strategie jsou známy, nemá smysl takovou hru hrát. Výsledek je předem určen. Nastane-li tato situace, pak musí ve výplatní matici být cena hry nejmenším prvkem ve své řádce a největším prvkem ve svém sloupci. Takový prvek nazýváme sedlovým bodem.

Věta 1
Má-li výplatní matice sedlový bod platí $max_i min_j a_{ij} = min_j max_i a_{ij}$ a hra má řešení.

Důkaz:
Má-li $A = (a_{ij})$ sedlový bod a_{kl}, pak $a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{ij}$. Pro každé i,j platí

$$max_i a_{il} \leq a_{kl} \leq min_j a_{kj}$$

$$min_j max_i a_{ij} \leq max_l a_{kl} \leq a_{kl} \leq min_j a_{kj} \leq max_i min_j a_{ij}$$

Protože opačná nerovnost platí vždy, tvrzení je dokázáno.

Existence sedlového bodu je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby maticová hra měla řešení. Má-li hra sedlový bod a hráči znají své optimální strategie, je předem určeno, jakou průměrnou výhru mohou hráči očekávat. Jde-li o hru bez náhodných stavů, je výsledek hry úplně předurčen. Stanovení sedlového bodu může být užitečné i při reálných konfliktních situacích a dovedou-li jej soupeři správně určit, může konflikt skončit rozumnou dohodou. Řada her, jako např. šachy, nebo dáma, patří do této skupiny her. Kdyby hráči znali optimální strategie, přestaly by být vlastně hrou.Pro velký počet možných strategií však není možné sedlový bod určit.

Uvažujme nyní jinou modifikaci senátní kampaně ve tvaru:

			II	
		1	2	3
	1	0	-2	2
I	2	5	4	-3
	3	2	3	-4

V tomto případě je dolní cena hry $\underline{v} = -2$, z čehož pro hráče I vyplývá volba strategie 1. Ale horní cena hry $\overline{v} = 2$ předurčuje hráče II k volbě strategie. Tato hra tedy nemá sedlový bod a nemůžeme stanovit cenu hry. Uvažujme následující možný průběh hry:
hráč I vyhraje od hráče II 2 $\Rightarrow$ hráč II mění strategii 3 na 2 a vyhrává 2 od hráče I $\Rightarrow$ hráč I mění strategii 1 na 2 a vyhrává 4 $\Rightarrow$ hráč II mění strategii 2 na 3 a vyhrává

3 $\Rightarrow$ hráč I mění strategii 2 na 1 a vyhrává 2 a pořád dokola, čili výchozí řešení je nestabilní.

Samozřejmá otázka v této situaci zní. Lze najít nějaké řešení, nějaký herní plán? Klíčovým faktem je, zda lze nějakým způsobem předpovědět strategii soupeře. Pokud ano, lze z toho vycházet, pokud ne, opět není o co se opřít. Protože totéž platí i o soupeři, lze za výchozí stav považovat situaci, kdy ani jedna strana nedovede předpovědět reakci druhé strany. To je možné za předpokladu, že obě strany volí své strategie náhodně. V tomto případě hovoříme o hrách se smíšenými strategiemi.

7.2 Hry se smíšenými strategiemi

Pokud hra nemá sedlový bod, pak dochází k náhodnému výběru strategií a je tedy vhodné znát rozdělení pravděpodobností na množině strategií. Abychom mohli situaci matematicky popsat, označme:
x_i- pravděpodobnost, že hráč I použije strategii i, kde $i = 1, .., m$
y_j- pravděpodobnost, že II použije strategii j, kde $j = 1, .., n$
Říkáme, že hráč volí smíšenou strategii $x = (x_1, ..., x_m)$, jestliže ji volí náhodně, a to pomocí mechanismu, který zaručuje, že při dalším opakování hry se jednotlivé strategie vyskytnou s určitým relativními četnostmi. Plány $(x_1, .., x_m)$, popř. $(y_1, .., y_n)$, se nazývají smíšené strategie a strategie $x_1, .., x_m$, popř. $y_1, .., y_n$ jsou ryzí strategie.

Pro ilustraci zavedených pojmů uvažujme, že ve druhé modifikaci politické kampaně:
hráč I volí smíšenou strategii $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 1/2, 0)$,
hráč II volí smíšenou strategii $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1/2, 1/2)$.
Pravděpodobnost, že na sebe narazí strategie x_i a y_j, je rovna součinu $x_i y_j$ a výhra v tomto případě činí a_{ij}. Očekávaná výplata činí

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = 1/4(-2 + 4 - 3 + 2) = 1/4$$

Nyní se zdá být přirozené rozšířit úvahy prováděné výše pro ryzí strategie na strategie smíšené. Tj. existuje zde něco jako minimaxová, popř. maximinová strategie a sedlový bod? Mohou tedy hráči zvolit smíšenou strategii, která maximalizuje minimální očekávanou výplatu nebo minimalizuje maximální očekávanou ztrátu. Odpoveď na tuto otázku dává následující věta.

Věta 3 (Základní věta teorie her)
Každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích, tj. vždy existuje cena hry $\underline{v} = \overline{v}$.

Důkaz této věty vyplyne z dalších úvah, ve kterých ukážeme, že maticové hry jsou ekvivalentní s určitým problémem lineárního programování.

Uvažujme, jak najít optimální strategii hráče I. Očekávaná výplata je

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

a strategie $(x_1, ..., x_m)$ je optimální, jestliže

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \geq \underline{v} = v$$

pro všechny strategie oponenta. Nerovnost bude platit zejména pro všechny ryzí strategie

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq v$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq v$$

....

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq v.$$

Odtud vyplývá, že

$$\sum_{j=1}^{n} y_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j v = v,$$

poněvadž

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Jinými slovy, soustava těchto nerovností je ekvivalentní nerovnosti původní. Dále musí být splněno

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1,$$

$$x_i \geq 0,$$

Nyní dělme všechny nerovnosti číslem v. Dostaneme pak při označení $x_i/v = u_i$ soustavu nerovnic tvaru

$$a_{11}u_1 + ... + a_{m1}u_m \geq 1$$

....

$$a_{1n}u_1 + ... + a_{mn}u_m \geq 1$$

$$u_1 + ... + u_m = 1$$

Hráč I chce maximalizovat svou výhru, což je totéž, co minimalizovat hodnotu $1/v$. Čili minimalizovaná funkce má tvar

$$\min 1/v = u_1 + ... + u_m.$$

Poznámka: Při dělení číslem v jsme předpokládali, že $v \geq 0$. To lze ale vždy zaručit vhodnou úpravou výplatní matice, která mění pouze cenu hry a ne řešení.

Abychom našli optimální strategii pro hráče I, stačí nalézt minimum lineární funkce při stanovených omezeních. To je ale běžný problém lineárního programování. Známe-li optimální hodnoty u_i, najdeme snadno cenu hry v i hodnoty x_i dávající optimální smíšenou strategii hráče I. Je zřejmé, že hledání optimálních strategií hráče II vede k úloze duální.

Všimněme si ještě, že jsou-li prvky výplatní matice hry vesměs nezáporné (a toho můžeme úpravou hry vždy dosáhnout), má ekvivalentní úloha lineárního programování, i úloha k ní duální, přípustné řešení. To znamená, že obě úlohy mají optimální řešení se stejnou hodnotou účelové funkce. Odtud již základní věta teorie her bezprostředně vyplývá.

Příklady k procvičení

1. Pro každou z následujících výplatních tabulek určete optimální strategii pro každého z hráčů eliminací dominantních strategií.

(a)

		II		
		1	2	3
	1	3	1	2
I	2	1	2	1
	3	1	0	-2

(b)

		II		
		1	2	3
	1	0	4	1
I	2	-1	-2	3
	3	1	3	2

2. Nalezněte sedlový bod hry s výplatní maticí

		II			
		1	2	3	4
	1	3	-3	-1	-7
I	2	1	-1	5	3
	3	-7	-5	-3	7

3. V obou smíšených strategiích řešte hru kámen-nůžky-papír, jejíž výplatní matice má při stanovené výhře či prohře 1 Kč následující tvar

		II		
		K	N	P
	K	0	1	-1
I	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

4. Pro každou z následujících her daných příslušnou výplatní maticí, převeďte problém nalezení optimálních strategií dvou hráčů na ekvivalentní problém lineárního programování

(a)

		II		
		1	2	3
	1	5	3	2
I	2	3	-2	3
	3	2	6	-1

(b)

		II				
		1	2	3	4	5
	1	-3	-6	5	-2	3
I	2	-1	4	-4	1	-2
	3	0	-2	-5	-3	1
	4	2	-3	0	2	4